Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Завдання очного туру
Всеукраїнської олімпіади з математики
для професійної орієнтації вступників на базі повної загальної середньої освіти

Вказівки до розв'язання задач

1. Обчислити

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\, dx.$$

Розв'язання.
Враховуючи означення модуля числа, маємо

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (-\sin x)\, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)\, dx = 2.$$

Відповідь: 2.

2. Знайти найбільше значення функції

$$f(x) = 2\sin x + \sqrt{5}\cos x.$$

Розв'язання.
Можна скористатись, наприклад, тим, що

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi),$$

де φ — кут, для якого $\cos\varphi = a/\sqrt{a^2+b^2}$, $\sin\varphi = b/\sqrt{a^2+b^2}$. Тому найбільше значення $f(x)$ дорівнює $\sqrt{a^2+b^2}$. Зокрема, для $a = 2, b = \sqrt{5}$ маємо $\sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} = 3$.
Відповідь: 3.

3. Змішали 30%-й і 10%-й розчини соляної кислоти. Отримали 600 г 15%-го розчину. Скільки грамів 30%-го розчину було взято?

Розв'язання.
Нехай x — кількість грам 30%-го розчину, y — кількість грам 10%-го розчину.
Маємо

$$\begin{cases} 0{,}3\,x + 0{,}1y = 0{,}15\cdot 600, \\ x + y = 600. \end{cases}$$

Звідси $x = 150$.
Відповідь: 150 г.

4. Спростити вираз

$$A(x) = \sqrt{x^2+6x+9} + \sqrt{x^2-2x+1} - 1,$$

якщо $x \in [-2; 0]$.

Розв'язання.

$$A(x) = \sqrt{x^2+6x+9} + \sqrt{x^2-2x+1} - 1 = |x+3| + |x-1| - 1.$$

На проміжку $[-3;1]$

$$A(x) = (x+3) - (x-1) - 1 = 3.$$

Проміжок $[-2;0] \subset [-3;1]$, тому якщо $x \in [-2;0]$, то

$$A(x) = 3.$$

Відповідь: 3.

5. Знайти найбільше ціле r, при якому система рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2, \\ -x + y = 8\sqrt{2} \end{cases}$$

не має розв'язків.

Розв'язання.

Пряма $-x + y = 8\sqrt{2}$ дотикається кола $x^2 + y^2 = r^2$ при $r = 8$. При $r > 8$ пряма і коло мають дві спільні точки. При $0 < r < 8$ пряма і коло не мають спільних точок. Тому найменше ціле r, при якому система рівнянь не має ров'язків, дорівнює 7.

Відповідь: 7.

6. Обчислити площу фігури, координати точок якої задовольняють нерівності

$$0 \le y \le f(x), \quad -4 \le x \le 4,$$

де

$$f(x) = |x-1|.$$

Розв'язання.

Фігуру, про яку йде мова, утворюють два трикутники: один з вершинами (-4,0); (-4,5); (1,0), другий з вершинами (1,0); (4,0); (4,3).

Відповідь: 17.

7. Обчислити $\sin\alpha$, якщо $\cos\alpha = -0{,}8$; $\pi \le \alpha \le \frac{3\pi}{2}$.

Розв'язання.

При $\pi \le \alpha \le \frac{3\pi}{2}$ функція $\sin\alpha$ набуває від'ємних значень, тому

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-(-0{,}8)^2} = -0{,}6.$$

Відповідь: $-0{,}6$.

8. Обчислити $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 9$.

Розв'язання.

У всіх логарифмах перейти, наприклад, до основи 3.

Відповідь: 2.

9. Знайти найменше ціле x, що задовольняє нерівність

$$\frac{10}{x} < x.$$

Розв'язання.

Нерівність

$$\frac{10}{x} < x$$

рівносильна нерівності

$$\frac{x^2-10}{x} > 0.$$

Розв'язуючи останню нерівність методом інтервалів, знаходимо, що найменшим цілим x, яке задовольняє нерівність, є -3.

Відповідь: -3.

10. Точка дотику кола, вписаного в ромб, ділить його сторону на відрізки довжиною 4 і 9 одиниць. Обчислити площу ромба.

Розв'язання.

Нехай $ABCD$ — ромб, O — центр кола, вписаного в ромб, K —точка дотику кола до сторони AD ромба. Тоді OK — висота трикутника, опущена з вершини прямого кута трикутника AOD на його гіпотенузу (причому $AK=9, KD=4$). Звідси

$$OK = \sqrt{AK \cdot KD} = \sqrt{9 \cdot 4} = 6.$$

А отже, площа ромба дорівнює 156.

Відповідь: 156.

Голова предметно-методичної
комісії, завідувач кафедри статистики
й теорії ймовірностей — Турчин В.М.