Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Завдання очного туру
Всеукраїнської олімпіади з математики
для професійної орієнтації вступників на базі повної загальної середньої освіти

Вказівки до розв'язання задач

1. За відомим графіком функції $y = x^2$ побудувати графік функції

$$y = |x^2 - 4|x| + 3|.$$

Вказівки до розв'язування.

Зазначимо, що $y = |x^2 - 4|x| + 3|$ є парною функцією, тому її графік симетричний відносно осі Oy. Графік функції $y = |x^2 - 4x + 3|$ отримуємо із графіка функції $y = x^2 - 4x +$ $+3$, відобразивши відносно осі Ox частину графіка останньої, що лежить нижче осі Ox, і залишивши без змін частину графіка функції, яка лежить вище осі Ox.

2. Обчислити

$$\sqrt{\frac{1 + \cos 8}{2}} + \cos 4 + 4.$$

Вказівки до розв'язування.

Маємо

$$\sqrt{\frac{1 + \cos 8}{2}} + \cos 4 + 4 = \sqrt{\cos^2 4} + \cos 4 + 4 =$$
$$= |\cos 4| + \cos 4 + 4 = -\cos 4 + \cos 4 + 4 = 4.$$

Відповідь: 4.

3. Знайти розв'язок нерівності (у градусах) із вказаного проміжку:

$$\log_{\frac{1}{3}} \mathrm{tg} x > \frac{1}{2}; \;\; (90^\circ, 270^\circ).$$

Вказівки до розв'язування.

Нерівність $\log_{\frac{1}{3}}(\mathrm{tg} x) > 1/2$ рівносильна

$$0 < \mathrm{tg} x < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Відповідь: $(180^\circ; 210^\circ)$.

4. Діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ взаємно перпендикулярні, їх довжини дорівнюють 10 і 18 одиниць. Знайти площу чотирикутника.

Вказівки до розв'язування.

Нехай O — точка перетину діагоналей. Очевидно

$$S = S_{ABO} + S_{OBC} + S_{DOC} + S_{AOD} = \frac{1}{2}OA \cdot OB + \frac{1}{2}OB \cdot OC + \frac{1}{2}OC \cdot OD + \frac{1}{2}OA \cdot OD =$$

$$= \frac{1}{2}OB \cdot (OA + OC) + \frac{1}{2}OD \cdot (OC + OA) = \frac{1}{2} \cdot (OA + OC) \cdot (OB + OD) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 18 = 90.$$

Відповідь: 90.

5. Розв'язати рівняння

$$|2 + x - x^2| = 2 + x - x^2.$$

Вказівки до розв'язування.

$|a| = a$ тоді й тільки тоді, коли $a \geq 0$, тому розв'язком рівняння буде множина точок, які задовольняють нерівності $2 + x - x^2 \geq 0$. Розв'язок останньої: $-1 \leq x \leq 2$.

Відповідь: [-1; 2].

6. Знайти розв'язок нерівності (у градусах) із вказаного проміжку:

$$\sqrt{\sin x + \frac{1}{2}} > -\frac{1}{\sqrt{2}}; \;\; [90°; 270°].$$

Вказівки до розв'язування.

Нерівність

$$\sqrt{\sin x + \frac{1}{2}} > -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

рівносильна нерівності

$$\sin x + \frac{1}{2} \geq 0.$$

Відповідь: $[90°; 210°]$.

7. Розв'язати рівняння

$$(x^2 - 9)\sqrt{x + 2} = 0.$$

Відповідь: $-2; 3$.

8. Розв'язати нерівність

$$16^{\log_4 x} + 4x - 12 > 0.$$

Вказівки до розв'язування.

Очевидно, $x > 0$ і мають місце такі рівносильні нерівності.

$$16^{\log_4 x} + 4x - 12 > 0,$$
$$(4^2)^{\log_4 x} + 4x - 12 > 0,$$
$$4^{2\log_4 x} + 4x - 12 > 0,$$
$$4^{\log_4 x^2} + 4x - 12 > 0,$$
$$x^2 + 4x - 12 > 0.$$

Відповідь: $(2; +\infty)$.

9. Дано три вершини паралелограма $A(6; 10); B(-2; -3); C(12; 4)$ (AC — діагональ). Знайти координати четвертої вершини.

Вказівки до розв'язування.

Координати середини M відрізка з кінцями $K_1(x_1, y_1)$ та $K_2(x_2, y_2)$ дорівнюють $((x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2)$.

Відповідь: $D(20; 17)$.

10. Записати рівняння дотичної до графіка функції

$$y = 0{,}5x^2 - 3x$$

у точці $x_0 = -2$.

Вказівки до розв'язування.

Дотична проходить через точку $(x_0, y_0) = (-2, 8)$. Кутовий коефіцієнт k дотичної дорівнює значенню похідної від функції $y = 0{,}5x^2 - 3x$ у точці $x_0 = -2$, а саме $k = -5$.

Відповідь: $y = -5(x + 2) + 8$.