МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ

основные
понятия
примеры
задачи

В.Н. ТУРЧИН
Е.В. ТУРЧИН

В.Н. ТУРЧИН, Е.В. ТУРЧИН

МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ

основные понятия, примеры, задачи

Учебное пособие для студентов высших учебных заведений

Рекомендовано Министерством образования и науки, молодежи и спорта Украины

Дніпропетровськ. LizunoffPress. 2016

УДК 519.21
ББК 22.17я73
Т89

Рецензенты: *Ю.В. Козаченко,* д-р физ.-мат. наук, проф. (Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко),
В.В. Булдыгин, д-р физ.-мат. наук, проф. (Национальный технический университет Украины «КПИ»).

Рекомендовано Министерством образования и науки, молодежи и спорта Украины в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений (письмо № 1/11 — 857 от 30.01.13).

Навчальний посібник є елементарним вступом до теорії марковських ланцюгів — області сучасної теорії ймовірностей із широкою сферою застосувань. Викладено основні поняття і факти теорії марковських ланцюгів. Теоретичні положення проілюстровано численними прикладами. До кожної глави наведено набір завдань для самостійної роботи. Для читання книги досить знань теорії ймовірностей у обсязі дискретної моделі та вищої математики в обсязі стандартного курсу вищих навчальних закладів.

Для студентів вищих навчальних закладів.

Турчин В.Н., Турчин Е.В.

Т89 Марковские цепи: Основные понятия, примеры, задачи: Учеб. пособ. для студентов вузов. — Днепропетровск: ЛизуновПресс, 2016. — 192 с.

ISBN 978-966-2575-61-3

Учебное пособие представляет собой элементарное введение в теорию марковских цепей — широко используемую в приложениях область современной теории вероятностей. Изложены основные понятия и факты теории марковских цепей. Теоретические положения проиллюстрированы многочисленными примерами. К каждой главе приведен набор задач для самостоятельной работы. Для чтения книги достаточно знания теории вероятностей в объеме дискретной модели и высшей математики в объеме стандартного курса высших учебных заведений.

Для студентов высших учебных заведений.

УДК 519.21
ББК 22.17я73

В оформлении обложки использована работа Клода Моне «Розовая тропинка, Живерни».

ISBN 978-966-2575-61-3

Предисловие

Настоящее учебное пособие является элементарным введением в теорию случайных процессов, которая является содержательной, широко используемой в приложениях областью современной теории вероятностей. Оно написано на основе лекций, читаемых авторами в Днепропетровском национальном университете имени Олеся Гончара.

Марковские цепи представляют собой простейший тип случайных процессов, для которых характерно “отсутствие памяти”. Книга охватывает традиционную тематику курса “Марковские цепи”: матрицы переходных вероятностей и задание марковской цепи, возвратность, классификация состояний, классы эквивалентности, эргодическая теорема, эргодические и стационарные распределения, предельное поведение марковской цепи, марковская цепь, описывающая очередь, задача о разорении игрока, марковские цепи с непрерывным временем, пуассоновский процесс, процессы рождения и гибели, обратные и прямые уравнения Колмогорова, эргодическая теорема для процесса рождения и гибели, обслуживание с ожиданием, дифференцируемость переходных вероятностей и время пребывания в состоянии.

Изложение материала иллюстрируется многочисленными примерами и задачами, в частности, из теории массового обслуживания.

Учебным пособием могут пользоваться как студенты механико-математических факультетов, факультетов прикладной математики и кибернетики университетов, так и технических, педагогических, экономических высших учебных заведений.

Авторы будут признательны всем, кто в той или иной форме выскажет свои пожелания, замечания и предложения относительно содержания книги. Предложения и пожелания просим присылать по адресу: Украина, 49010, Днепропетровск-10, пр. Гагарина, 72, Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, механико-математический факультет, кафедра статистики и теории вероятностей, В. Н. Турчину или по адресу vnturchyn@gmail.com

Глава 1

Цепи Маркова — основные понятия и факты

Детерминированные и стохастически детерминированные системы. В различных областях естествознания, науки и техники мы имеем дело с системами, состояние которых в данный момент определяет их дальнейшую эволюцию. Такие системы называют детерминированными. Естественным обобщением детерминированных систем являются стохастически детерминированные системы. Они эволюционируют случайным образом, но состояние системы в данный момент времени определяет ее распределение (вероятности пребывания в состояниях) во все последующие моменты времени. Такие системы называются марковскими.

Мы будем изучать марковские системы, множество возможных состояний X которых — фазовое пространство — конечно либо счетно (будем считать X множеством целых чисел или его частью).

Математическими моделями марковских систем, у которых переходы из одного состояния в другое осуществляются в целочисленные моменты времени $t = 0, 1, 2, \ldots$ являются цепи Маркова с дискретным временем, а моделями систем, у которых переходы могут происходить в любой момент времени $t \in [0, +\infty)$, являются цепи Маркова с непрерывным временем.

1.1 Определение цепи Маркова. Простейшие свойства

Далее множество состояний цепи — фазовое пространство X — множество целых чисел или его часть.

Определение. Последовательность $\{\xi_k\}$ целочисленных случайных величин таких, что

$$P\{\xi_{k+1} = i_{k+1} | \xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, ..., \xi_k = i_k\} =$$

$$= P\{\xi_{k+1} = i_{k+1} | \xi_k = i_k\} \qquad (1.1.1)$$

для каждого $k \geq 0$ и любых $i_0, i_1, ..., i_{k+1}$ из фазового пространства X будем называть *цепью Маркова* (*марковской цепью*).

Предполагается, что все условные вероятности, участвующие в определении марковской цепи, определены.

Равенство (1.1.1) называют *марковским свойством.*

Так что марковская цепь — это последовательность целочисленных случайных величин, для которой имеет место марковское свойство.

Случайную величину ξ_k будем называть *состоянием системы* в момент времени $t = k$, $k = 0, 1, ...$, вероятность $P\{\xi_k = i\}$, $i \in X$, — вероятностью пребывания системы (цепи) в состоянии i, а вероятностное распределение $P\{\xi_k = i\}$, $i \in X$, будем называть распределением цепи в момент $t = k$, $k = 0, 1, ...$

Переходные вероятности марковской цепи. Условную вероятность $P\{\xi_{k+1} = j | \xi_k = i\}$ называют *одношаговой переходной вероятностью* из состояния i в состояние j и обозначают $P_{ij}(k, k+1)$:

$$P\{\xi_{k+1} = j | \xi_k = i\} = P_{ij}(k, k+1).$$

Условную вероятность $P\{\xi_{k+n} = j | \xi_k = i\}$ называют *n-шаговой переходной вероятностью* из состояния i в состояние j и обозначают $P_{ij}(k, k+n)$, т. е.

$$P\{\xi_{k+n} = j | \xi_k = i\} = P_{ij}(k, k+n).$$

В общем случае переходные вероятности зависят не только от начального i и конечного j состояний цепи, но и от k (момента перехода).

Определение. Марковскую цепь будем называть *стационарной*, если ее переходные вероятности $P_{ij}(k, k+n)$ не зависят от k. В этом случае переходные вероятности называют *стационарными* и обозначают $P_{ij}(n)$:

$$P_{ij}(k, k+n) = P_{ij}(n),$$

$P_{ij}(n)$ еще называют вероятностью перехода цепи из i в j за n шагов (n-шаговой переходной вероятностью). По определению

$$P_{ii}(0) = 1, \; P_{ij}(0) = 0, \; j \neq i.$$

Одношаговые стационарные переходные вероятности обозначают через P_{ij}, т. е.

$$P\{\xi_{k+1} = j | \xi_k = i\} = P_{ij}.$$

Вероятность P_{ij} еще называют вероятностью перехода цепи из i в j за один шаг.

Далее мы будем рассматривать только стационарные марковские цепи.

Если $\xi_k = i, \xi_{k+1} = j$, то мы будем говорить, что цепь за один шаг переходит из состояния i в состояние j.

Если $\xi_k = i, \xi_{k+n} = j$, то будем говорить, что цепь за n шагов переходит из состояния i в состояние j.

Матрицы переходных вероятностей. Пусть $\{\xi_k\}$ — марковская цепь с фазовым пространством $X = \{0, 1, \ldots\}$. Матрицу, составленную из элементов $P_{ij}(n)$, называют *матрицей n-шаговых переходных вероятностей* и обозначают

$$\mathbb{P}(n) = [P_{ij}(n)] = \begin{bmatrix} P_{00}(n) & P_{01}(n) & \ldots \\ P_{10}(n) & P_{11}(n) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{i0}(n) & P_{i1}(n) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

В частности, если $n = 1$, то матрицу $\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}$, составленную из элементов $P_{ij}(1) = P_{ij}$, называют *матрицей одношаговых переходных вероятностей* и обозначают

$$\mathbb{P} = [P_{ij}] = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & \ldots \\ P_{10} & P_{11} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{i0} & P_{i1} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Матрица n-шаговых переходных вероятностей (в частности, матрица одношаговых переходных вероятностей) обладает свойствами:

$$1^\circ\ P_{ij}(n) \geq 0,\ i,j = 0,1,\ldots,$$

$$2^\circ\ \sum_j P_{ij}(n) = 1,\ i = 0,1,\ldots$$

Свойство 1° очевидно (поскольку $P_{ij}(n)$ являются вероятностями).

Свойство 2° следует из свойства счетной аддитивности вероятности — достаточно заметить, что условная вероятность $P(\cdot/\{\xi_0 = i\})$ относительно события $\{\xi_0 = i\}$ является вероятностью, а

$$\Omega = \bigcup_j \{\xi_n = j\},\ \{\xi_n = k\} \cap \{\xi_n = l\} = \emptyset,\ k \neq l.$$

Тогда

$$1 = P(\Omega|\{\xi_0 = i\}) = \sum_j P\{\xi_n = j|\xi_0 = i\} = \sum_j P_{ij}(n).$$

Свойства $1^\circ, 2^\circ$ обозначают, что каждая строка матрицы n-шаговых переходных вероятностей является вероятностным распределением на фазовом пространстве цепи.

Определение. Матрица $[P_{ij}]$, элементы которой удовлетворяют условиям

$$P_{ij} \geq 0,\ i,j \in X,$$

$$\sum_j P_{ij} = 1,\ i \in X,$$

называется *стохастической*.

Следующее утверждение является непосредственным следствием марковского свойства.

Теорема 1.1.1 (уравнение Колмогорова-Чепмена). *В марковской цепи для любых i,j из фазового пространства X и любых целых положительных целых чисел r, s*

$$P_{ij}(r+s) = \sum_{k \in X} P_{ik}(r) P_{kj}(s) \tag{1.1.2}$$

или в матричном виде:

$$\mathbb{P}(r+s) = \mathbb{P}(r)\mathbb{P}(s).$$

Доказательство. Очевидно

$$\{\xi_{r+s}=j,\xi_0=i\}=\bigcup_k\{\xi_0=i,\xi_r=k,\xi_{r+s}=j\},$$

причем события в правой части несовместны. Отсюда, учитывая, что для $\{\xi_n\}$ имеет место марковское свойство, получаем

$$P\{\xi_{r+s}=j|\xi_0=i\}=\sum_k P\{\xi_{r+s}=j,\xi_r=k|\xi_0=i\}=$$

$$=\sum_k\frac{P\{\xi_{r+s}=j,\xi_r=k,\xi_0=i\}}{P\{\xi_0=i\}}=$$

$$=\sum_k\frac{P\{\xi_{r+s}=j|\xi_r=k,\xi_0=i\}P\{\xi_r=k,\xi_0=i\}}{P\{\xi_0=i\}}=$$

$$=\sum_k P\{\xi_{r+s}=j|\xi_r=k\}P\{\xi_r=k|\xi_0=i\}=\sum_k P_{ik}(r)P_{kj}(s).$$

Так что

$$P_{ij}(r+s)=\sum_k P_{ik}(r)P_{kj}(s),\ i,j\in X.$$

Совокупность этих равенств можно записать в матричном виде так:

$$\mathbb{P}(r+s)=\mathbb{P}(r)\mathbb{P}(s).$$

Из уравнения Колмогорова-Чепмена следует, что по матрице одношаговых переходных вероятностей всегда можно выписать матрицу n-шаговых переходных вероятностей.

Следствие 1. *Матрица n-шаговых переходных вероятностей равна n-й степени матрицы одношаговых переходных вероятностей:*

$$\mathbb{P}(n)=(\mathbb{P})^n.$$

Доказательство. В силу теоремы

$$\mathbb{P}(r+s)=\mathbb{P}(r)\mathbb{P}(s).$$

В частности,

$$\mathbb{P}(n)=\mathbb{P}\mathbb{P}(n-1)=\mathbb{P}(\mathbb{P}\mathbb{P}(n-2))=(\mathbb{P})^2\mathbb{P}(n-2)=\ldots=(\mathbb{P})^n.$$

Следствие 2. *Матрица n-шаговых переходных вероятностей марковской цепи является стохастической.*

Доказательство. Из следствия 1 имеем

$$\mathbb{P}(n) = (\mathbb{P})^n.$$

Убедимся, что матрица $(\mathbb{P})^n$ стохастическая.

Достаточно убедиться, что если $\mathbb{P}$ — стохастическая матрица, то и $(\mathbb{P})^2$ также стохастическая матрица.

Элементы матрицы $(\mathbb{P})^2$ имеют вид

$$\sum_k P_{ik}P_{kj},\ \ i,j \in X.$$

Отсюда, во-первых, следует, что они неотрицательны, и, во-вторых, сумма элементов i-строки, $i \in X$,

$$\sum_j \Big(\sum_k P_{ik}P_{kj}\Big) = \sum_k \sum_j P_{ik}P_{kj} =$$

$$= \sum_k P_{ik} \sum_j P_{kj} = \sum_k P_{ik} = 1,\ \ i \in X.$$

Следствие 3.

$$P_{ij}(r+s) \geq P_{ik}(r)P_{kj}(s),\ \ k \in X.$$

Следствие 4. *Для любых $i, j \in X$ и целых положительных r, s, t*

$$P_{ij}(r+s+t) = \sum_{k,u \in X} P_{ik}(r)P_{ku}(s)P_{uj}(t)\ .$$

или в матричном виде

$$\mathbb{P}(r+s+t) = \mathbb{P}(r)\mathbb{P}(s)\mathbb{P}(t).$$

Следствие 5.

$$P_{ij}(r+s+t) \geq P_{ik}(r)P_{ku}(s)P_{uj}(t),\ \ k,u \in X.$$

Примеры марковских цепей. К приведенным примерам марковских цепей мы будем неоднократно возвращаться.

Пример 1.1.1 (одномерное случайное блуждание). *Частица движется по целочисленной решетке $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, меняя свое положение в целочисленные моменты времени. Обозначим через $\xi_n, n = 0, 1, 2, \ldots$, положение (координату) частицы в момент времени n. За единицу времени (за один шаг) частица перемещается из точки с координатой i в точку с координатой $(i-1)$ с вероятностью q_i, в точку $(i+1)$ — с вероятностью p_i, либо остается в точке i с вероятностью r_i $(p_i + q_i + r_i = 1)$ — будем говорить, что частица принимает участие в одномерном случайном блуждании по целочисленной решетке. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ еще называют одномерным случайным блужданием.*

Убедимся, что $\{\xi_n\}$ образует марковскую цепь и найдем ее матрицу одношаговых переходных вероятностей.

Покажем, что последовательность $\{\xi_n\}$ обладает марковским свойством. Для этого выпишем

$$P\{\xi_{n+1} = j | \xi_n = i, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_0 = i_0\}, \; P\{\xi_{n+1} = j | \xi_n = i\}.$$

По определению случайного блуждания по одномерной целочисленной решетке,

$$P\{\xi_{n+1} = j | \xi_n = i, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_0 = i_0\} =$$

$$= \begin{cases} p_i, & \text{если } j = i+1; \\ q_i, & \text{если } j = i-1; \\ r_i, & \text{если } j = i; \end{cases}$$

$$P\{\xi_{n+1} = j | \xi_n = i\} = \begin{cases} p_i, & \text{если } j = i+1; \\ q_i, & \text{если } j = i-1; \\ r_i, & \text{если } j = i. \end{cases} \tag{1.1.3}$$

Так что

$$P\{\xi_{n+1} = j | \xi_n = i, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots \xi_0 = i_0\} = P\{\xi_{n+1} = j | \xi_n = i\},$$

т. е. для последовательности случайных величин $\{\xi_n\}$ имеет место марковское свойство и, следовательно, $\{\xi_n\}$ является марковской цепью.

Равенства (1.1.3) задают элементы матрицы одношаговых переходных вероятностей $\mathbb{P} = [P_{ij}]$. Подробнее:

$$P\{\xi_{n+1} = i+1 | \xi_n = i\} = P_{i,i+1} = p_i,$$

$$P\{\xi_{n+1} = i-1 | \xi_n = i\} = P_{i,i-1} = q_i,$$

$$P\{\xi_{n+1} = i | \xi_n = i\} = P_{i,i} = r_i,$$

где $p_i \geq 0, q_i \geq 0, r_i \geq 0$, $p_i + q_i + r_i = 1, i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$

Если фазовым пространством X марковской цепи является множество целых неотрицательных чисел, то матрица переходных вероятностей случайного блуждания, очевидно, имеет вид

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \cdots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{1.1.4}$$

Ясно, что $p_0 + r_0 = 1$. Если при этом $p_0 = 1$ (а значит $r_0 = 0$), то нулевое состояние обладает свойством отражающего экрана (в нуле находится упругая стенка). Если $p_0 = 0$, $r_0 = 1$, то состояние нуль ведет себя как поглощающий экран — попав в состояние нуль, частица остается в нем навсегда. Если $p_0 > 0$, $r_0 > 0$, то состояние нуль — частично отражающий экран.

Если фазовое пространство случайного блуждания ограничено, например, $X = \{0, 1, \ldots, M\}$, то матрица переходных вероятностей имеет вид

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & q_{M-1} & r_{M-1} & p_{M-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & q_M & r_M \end{bmatrix}. \tag{1.1.5}$$

Состояния 0 и M могут быть экранами перечисленных выше типов.

Заметим, что для случайного блуждания $\{\xi_n\}$ имеет место представление

$$\xi_{k+1} = \xi_k + v_{k+1},\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

или, что то же,

$$\xi_{k+1} = \xi_0 + \sum_{i=1}^{k+1} v_i,\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где случайные величины v_k независимы и каждая имеет распределение

$$P\{v_k = -1\} = q_k, P\{v_k = 0\} = r_k, P\{v_k = 1\} = p_k,\ p_k + q_k + r_k = 1.$$

Пример 1.1.2 (азартная игра). *Игрок G_m (с капиталом m) играет в азартную игру с игроком G_M (с капиталом M), участвуя в серии последовательных партий игры. В результате каждой партии капитал игрока G_m с вероятностью p увеличивается на 1 (за счет игрока G_M) и с вероятностью $q = 1 - p$ уменьшается на 1 (в пользу игрока G_M). Результат каждой партии не зависит от результатов предыдущих партий.*

Обозначим через ξ_k капитал игрока G_m после k-й партии, через n суммарный капитал игроков G_m и $G_M : n = m+M$. Если $\xi_k = 0$ или $\xi_k = n$, то игра прекращается. Событие $\{\xi_k = 0\}$ означает разорение игрока G_m, событие $\{\xi_k = n\}$ — разорение игрока G_M.

Покажем, что последовательность $\{\xi_k\}$ образует марковскую цепь, найдем ее матрицу переходных вероятностей.

Решение. Обозначим через v_k результат k-й партии — изменение капитала игрока G_m в результате k-й партии, v_k — случайная величина с распределением

$$P\{v_k = 1\} = p,\ P\{v_k = -1\} = q,$$

$p > 0, q > 0, p+q = 1, k = 1, 2, \dots$ Случайные величины $v_1, v_2, \dots$ независимы.

Очевидно,

$$\xi_{k+1} = \xi_k + v_{k+1},\ k = 0, 1, \dots,\ \xi_0 = m$$

или, что то же,

$$\xi_{k+1} = \xi_0 + \sum_{i=1}^{k+1} v_i,\ k = 0, 1, 2, \dots;\ \xi_0 = m.$$

Убедимся, что для последовательности $\{\xi_k\}$ имеет место марковское свойство. Для этого выпишем

$$P\{\xi_{k+1} = j | \xi_k = i, \xi_{k-1} = i_{k-1}, \dots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = m\},$$

$$P\{\xi_{k+1} = j | \xi_k = i\}.$$

Имеем:

$$P\{\xi_{k+1} = j | \xi_k = i, \xi_{k-1} = i_{k-1}, \dots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = m\} =$$

$$= \frac{P\{\xi_{k+1} = j, \xi_k = i, \xi_{k-1} = i_{k-1}, \dots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = m\}}{P\{\xi_k = i, \xi_{k-1} = i_{k-1}, \dots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = m\}} =$$

$$= \frac{P\{\xi_k + v_{k+1} = j, \xi_k = i, \xi_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = m\}}{P\{\xi_k = i, \xi_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = m\}} =$$

$$= \frac{P\{i + v_{k+1} = j, \xi_k = i, \xi_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = m\}}{P\{\xi_k = i, \xi_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = m\}} =$$

$$= \frac{P\{v_{k+1} = j - i\}P\{\xi_k = i, \xi_{k-1} = i_{k-1} \ldots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = m\}}{P\{\xi_k = i, \xi_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = m\}} =$$

$$= P\{v_{k+1} = j - i\},$$

воспользовались независимостью событий

$$\{v_{k+1} = j - i\},\ \{\xi_k = i, \xi_{k-1} = i_{k-1}, \ldots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = m\}.$$

Аналогично получаем

$$P\{\xi_{k+1} = j | \xi_k = i\} = P\{v_{k+1} = j - i\}$$

(чтобы сумма $\xi_{k+1} = \xi_k + v_{k+1}$ была равна j, при условии, что $\xi_k = i$, слагаемое v_{k+1} должно быть равно $j - i$).

Поэтому последовательность случайных величин $\{\xi_k\}$ обладает марковским свойством, и, следовательно, является марковской цепью. Элементы ее матрицы переходных вероятностей

$$P_{ij} = P\{\xi_{k+1} = j | \xi_k = i\} = P\{v_{k+1} = j - i\},$$

$i = 1, 2, \ldots, n-1$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Если $i = 0$, то

$$P\{\xi_{k+1} = 0 | \xi_k = 0\} = 1,$$

если $i = n$, то

$$P\{\xi_{k+1} = n | \xi_k = n\} = 1.$$

Цепь стационарная, поскольку переходные вероятности

$$P_{ij} = P\{v_{k+1} = j - i\}$$

не зависят от k (случайные величины $v_k, k = 1, 2, \ldots$, одинаково распределены).

Подробнее элементы матрицы переходных вероятностей запишутся так

$$P_{00} = P\{\xi_{k+1} = 0 | \xi_k = 0\} = 1,$$

$$P_{nn} = P\{\xi_{k+1} = n | \xi_k = n\} = 1,$$

$$P_{i,i+1} = P\{\xi_{k+1} = i + 1 | \xi_k = i\} = p,\ i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$P_{i,i-1} = P\{\xi_{k+1} = i-1|\xi_k = i\} = q,\ i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

все неперечисленные $P_{i,j}$ равны нулю. Сама матрица переходных вероятностей цепи $\{\xi_k\}$ имеет вид

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что состояния 0 и n являются поглощающими экранами.

Если капитал игрока G_M неограничен ($M = \infty$), матрица переходных вероятностей цепи $\{\xi_k\}$ имеет вид

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ q & 0 & p & 0 & \ldots \\ 0 & q & 0 & p & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{1.1.6}$$

(состояние 0 является поглощающим экраном).

Марковская цепь, описанная в примере 1.1.2, является частным случаем случайного блуждания (см. пример 1.1.1).

Пример 1.1.3 (сумма независимых случайных величин как марковская цепь). *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots$ — независимые неотрицательные целочисленные случайные величины, каждая с распределением*

$$P\{\xi_k = l\} = p_l,\ l = 0, 1, 2, \ldots$$

Рассмотрим последовательность случайных величин

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k,\ n = 1, 2, \ldots$$

Покажем, что последовательность $\{\eta_n\}$ образует марковскую цепь и найдем ее матрицу переходных вероятностей.

Решение. Аналогично тому, как мы это делали в примере 1.1.2, получаем

$$P\{\eta_{n+1} = j|\eta_n = i, \eta_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \eta_1 = i_1\} = P\{\xi_{n+1} = j - i\},$$

$$P\{\eta_{n+1} = j | \eta_n = i\} = P\{\xi_{n+1} = j - i\}$$

(чтобы сумма $\eta_{k+1} = \eta_k + \xi_{k+1}$ была равна j при условии, что $\eta_k = i$, слагаемое ξ_{k+1} должно быть равно $j - i$).

Из двух последних равенств следует, что, во-первых, $\{\eta_n\}$ — марковская цепь (для $\{\eta_n\}$ выполняется марковское свойство), а во-вторых, матрица переходных вероятностей $\{\eta_n\}$ имеет вид

$$\mathbb{P} = [P_{ij}] = [P\{\eta_{n+1} = j | \eta_n = i\}] = [P\{\xi_{n+1} = j - i\}]\,,\ i, j = 1, 2, \ldots$$

Подробнее

$$\mathbb{P} = [P_{ij}] = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \ldots \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \ldots \\ 0 & 0 & p_0 & p_1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & p_0 & \ldots \\ & & \ldots & & \end{bmatrix}.$$

З а м е ч а н и е. Сумма независимых целочисленных случайных величин будет марковской цепью и без предположения об их неотрицательности.

Задание марковской цепи. Случайная величина ξ задается своим распределением P_ξ, случайный вектор $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ — совместным распределением $P_{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n}$ случайных величин $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$, бесконечная последовательность случайных величин $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ (в частности, марковская цепь) задана, если для каждого n $(n = 0, 1, \ldots)$ известно распределение случайного вектора $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ — известны конечномерные распределения последовательности $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ Но оказывается, чтобы задать марковскую цепь — бесконечную последовательность случайных величин, для которой имеет место марковское свойство, достаточно задать распределение начального состояния ξ_0 цепи и матрицу $[P_{ij}]$ одношаговых переходных вероятностей.

Т е о р е м а 1.1.2. *Марковская цепь задается матрицей одношаговых переходных вероятностей $[P_{ij}]$ и своим распределением в начальный момент времени.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что для марковской цепи $\{\xi_n\}$ конечномерные распределения $P_{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n}$ вычисляются по ее одношаговым переходным вероятностям P_{ij} и распределению $\{p_k\}$ случайной величины ξ_0:

$$P\{\xi_0 = k\} = p_k,\ k = 0, 1, \ldots$$

Пользуясь марковским свойством, имеем

$$P_{\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n}(i_0,i_1,\ldots,i_n) =$$

$$= P\{\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \ldots, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \xi_n = i_n\} =$$

$$= P\{\xi_n = i_n | \xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \ldots, \xi_{n-1} = i_{n-1}\} \times$$

$$\times P\{\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \ldots, \xi_{n-1} = i_{n-1}\} =$$

$$= P\{\xi_n = i_n | \xi_{n-1} = i_{n-1}\} P\{\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \ldots, \xi_{n-1} = i_{n-1}\} =$$

$$= P_{i_{n-1},i_n} P\{\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \ldots, \xi_{n-1} = i_{n-1}\} = \ldots$$

$$\ldots = p_{i_0} P_{i_0 i_1} P_{i_1 i_2} \ldots P_{i_{n-1} i_n}.$$

Так что

$$P_{\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n}(i_0,i_1,\ldots,i_n) = p_{i_0} P_{i_0 i_1} P_{i_1 i_2} \ldots P_{i_{n-1} i_n}. \qquad (1.1.7)$$

З а м е ч а н и е. Поскольку одношаговые переходные вероятности

$$P_{ij} = P\{\xi_{k+1} = j | \xi_k = i\} = P\{\xi_{k+1} = j, \xi_k = i\} / P\{\xi_k = i\},$$

то для задания марковской цепи достаточно знать только ее двумерные распределения

$$P\{\xi_{k+1} = j, \xi_k = i\},\ i, j = 0, 1, 2, \ldots,$$

одномерные распределения выражаются через двумерные:

$$P\{\xi_k = i\} = \sum_s P\{\xi_k = i, \xi_{k-1} = s\}$$

О п р е д е л е н и е. При каждом фиксированном ω последовательность $\xi_0(\omega), \xi_1(\omega), \ldots, \xi_k(\omega), \ldots$ будем называть *траекторией марковской цепи* $\{\xi_n\}$.

Соотношение (1.1.7) задает вероятность того, что марковская цепь в моменты времени $0, 1, \ldots, n$ пройдет соответственно через точки $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i_n$.

Т е о р е м а 1.1.3. *Распределение*

$$P\{\xi_n = j\},\ j \in X,$$

марковской цепи $\{\xi_n\}$ *в момент времени* $t = n$ *задается ее распределением*

$$p_i = P\{\xi_0 = i\},\ i \in X,$$

в момент времени $t = 0$ *и матрицей* n*-шаговых переходных вероятностей:*

$$P\{\xi_n = j\} = \sum_{i \in X} p_i P_{ij}(n),\ j \in X. \qquad (1.1.8)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку события $\{\xi_0 = i\}$, $i \in X$, образуют полную группу:

$$\Omega = \bigcup_{i \in X} \{\xi_0 = i\},\ \{\xi_0 = k\} \cap \{\xi_0 = l\} = \emptyset,\ k \neq l,$$

то согласно формуле полной вероятности

$$P\{\xi_n = j\} = \sum_{i \in X} P\{\xi_0 = i\} P\{\xi_n = j | \xi_0 = i\} = \sum_{i \in X} p_i P_{ij}(n).$$

С л е д с т в и е. Из равенства (1.1.8) следует, что предельное поведение распределения

$$Q_n(j) = P\{\xi_n = j\},\ j \in X,$$

марковской цепи при $n \to \infty$ определяется предельным поведением n-шаговых переходных вероятностей цепи (и, возможно, ее начальным распределением $P\{\xi_0 = i\} = p_i$, $i \in X$).

Т е о р е м а 1.1.4. *Каждая стохастическая матрица задает марковскую цепь, другими словами, для данной стохастической матрицы найдется марковская цепь, матрица переходных вероятностей которой совпадает с данной стохастической матрицей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $[P_{ij}]$ — стохастическая матрица, $\{p_i\}$ — вероятностное распределение на $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Определим на множестве $\{0, 1, 2, \ldots\}$ семейство вероятностных распределений $P(i_0, i_1, \ldots, i_n)$ — для каждого n и любых $i_0, i_1, \ldots, i_n$ положим

$$P(i_0, i_1, \ldots, i_n) = P_{i_{n-1} i_n} P_{i_{n-2} i_{n-1}} \ldots P_{i_1 i_2} P_{i_0 i_1} p_{i_0}. \qquad (1.1.9)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\sum_{i_n, i_{n-1}, \ldots, i_0} P_{i_{n-1}i_n} P_{i_{n-2}i_{n-1}} \ldots P_{i_1 i_2} P_{i_0 i_1} p_{i_0} = 1.$$

Последовательность случайных величин $\xi_0, \xi_1, \ldots$ определим так, чтобы её конечномерные распределения, т. е. распределения векторов $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$, при каждом n совпадали с распределениями (1.1.9):

$$P\{\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \ldots, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \xi_n = i_n\} =$$

$$= P_{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n}(i_0, i_1, \ldots, i_n) = P_{i_{n-1}i_n} P_{i_{n-2}i_{n-1}} \ldots P_{i_1 i_2} P_{i_0 i_1} p_{i_0}$$

(такая последовательность случайных величин $\xi_0, \xi_1, \ldots$ всегда существует).

Убедимся, что последовательность случайных величин $\xi_0, \xi_1, \ldots$ обладает марковским свойством. Имеем

$$P\{\xi_{n+1} = j \,|\, \xi_n = i, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = i_0\} =$$

$$= \frac{P\{\xi_{n+1} = j, \xi_n = i, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = i_0\}}{P\{\xi_n = i, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = i_0\}} =$$

$$= \frac{P_{ij} P_{i_{n-1}i} P_{i_{n-2}i_{n-1}} \ldots P_{i_1 i_2} P_{i_0 i_1} p_{i_0}}{P_{i_{n-1}i} P_{i_{n-2}i_{n-1}} \ldots P_{i_1 i_2} P_{i_0 i_1} p_{i_0}} = P_{ij},$$

$$P\{\xi_{n+1} = j \,|\, \xi_n = i\} = \frac{P\{\xi_{n+1} = j, \xi_n = i\}}{P\{\xi_n = i\}} =$$

$$\frac{\sum\limits_{i_{n-1}, i_{n-2}, \ldots, i_0} P\{\xi_{n+1} = j, \xi_n = i, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = i_0\}}{\sum\limits_{i_{n-1}, i_{n-2}, \ldots, i_0} P\{\xi_n = i, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \xi_1 = i_1, \xi_0 = i_0\}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i_{n-1}, i_{n-2}, \ldots, i_0} P_{ij} P_{i_{n-1}i} P_{i_{n-2}i_{n-1}} \ldots P_{i_1 i_2} P_{i_0 i_1} p_{i_0}}{\sum\limits_{i_{n-1}, i_{n-2}, \ldots, i_0} P_{i_{n-1}i} P_{i_{n-2}i_{n-1}} \ldots P_{i_1 i_2} P_{i_0 i_1} p_{i_0}} = P_{ij}. \qquad (1.1.10)$$

Так что для последовательности случайных величин $\{\xi_k\}$ имеет место марковское свойство и, следовательно, $\{\xi_k\}$ является марковской цепью, причем ее матрица переходных вероятностей

$$[P\{\xi_{n+1} = j \,|\, \xi_n = i\}], \; i, j = 0, 1, 2, \ldots$$

совпадает с данной стохастической матрицей $[P_{ij}]$, т. е.

$$P\{\xi_{n+1} = j \,|\, \xi_n = i\} = P_{ij}, \ i, j = 0, 1, 2, \ldots$$

(см. равенство (1.1.10)).

Итак, стохастическая матрица $[P_{ij}]$ равенством (1.1.9) всегда задает на множестве $\{0, 1, 2, \ldots\}$ семейство распределений, а вместе с ним и последовательность случайных величин $\xi_0, \xi_1, \ldots$ с конечномерными распределениями (1.1.9). Такой вид конечномерных распределений случайных величин $\xi_0, \xi_1, \ldots$ гарантирует выполнение для них марковского свойства, поэтому последовательность $\xi_0, \xi_1, \ldots$ является марковской цепью.

Пример 1.1.4. *Марковская цепь с фазовым пространством* $X = \{1, 2, 3\}$ *описывается матрицей одношаговых переходных вероятностей*

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Найти вероятность того, что:

1° *цепь, стартовав из состояния* 1, *через два шага окажется в состоянии* 3;

2° *цепь, стартовав из состояния* 2, *через три шага окажется в состоянии* 3.

Найти распределение цепи в момент $t = 2$ (*через два шага после старта*), *если в момент* $t = 0$ *цепь с равными вероятностями находится в одном из своих состояний.*

Решение. Ясно, что необходимо найти

$$P\{\xi_2 = 3|\xi_0 = 1\} = P_{1,3}(2), \ P\{\xi_3 = 3|\xi_0 = 2\} = P_{2,3}(3),$$

или, что то же, элемент $P_{1,3}(2)$ матрицы $\mathbb{P}(2)$ и элемент $P_{2,3}(3)$ матрицы $\mathbb{P}(3)$. Матрицы $\mathbb{P}(2)$ и $\mathbb{P}(3)$ находим по матрице $\mathbb{P}$ одношаговых переходных вероятностей: $\mathbb{P}(2) = (\mathbb{P})^2$, $\mathbb{P}(3) = (\mathbb{P})^3$.

Распределение цепи в момент $t = 2$ (распределение случайной величины ξ_2) получим по известному начальному распределению

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

цепи и матрице $\mathbb{P}(2)$ двухшаговых переходных вероятностей, воспользовавшись равенством (1.1.8).

Ответы:
1° $P\{\xi_2 = 3\,|\xi_0 = 1\} = 1/4$;
2° $P\{\xi_3 = 3\,|\xi_0 = 2\} = 3/8$.
Распределение цепи в момент $t = 2$:

$$P\{\xi_2 = 1\} = 1/3,\ P\{\xi_2 = 2\} = 1/3,\ P\{\xi_2 = 3\} = 1/3.$$

1.2 Возвратность

Каждое состояние марковской цепи характеризуется временем первого возвращения.

Представим множество $\{\xi_0 = i\}$ в виде объединения следующих непересекающихся подмножеств:

$$\{\xi_0 = i, \xi_1 = i\},\ \{\xi_0 = i, \xi_\nu \neq i,\ \nu = 1, 2, \dots\},$$

$$\{\xi_0 = i, \xi_n = i, \xi_\nu \neq i,\ \nu = 1, 2, \dots, n-1\},\ n = 2, 3, \dots,$$

Определим случайную величину $\tau = \tau(\omega)$ так: на множестве $\{\xi_0 = i, \xi_1 = i\}$ она принимает значение 1, на множестве $\{\xi_0 = i, \xi_n = i, \xi_\nu \neq i, \nu = 1, 2, \dots, n-1\}$ $(n \geq 2)$ — значение n, на множестве $\{\xi_0 = i, \xi_\nu \neq i, \nu = 1, 2, \dots\}$ — значение $+\infty$ (на дополнении к $\{\xi_0 = i\}$ случайную величину τ будем считать равной 0). Из определения $\tau = \tau(\omega)$ следует, что

$$\{\tau = 1\} = \{\xi_0 = i, \xi_1 = i\},$$

$$\{\tau = \infty\} = \{\xi_0 = i, \xi_\nu \neq i,\ \nu = 1, 2, \dots\},$$

$$\{\tau = n\} = \{\xi_0 = i, \xi_n = i, \xi_\nu \neq i,\ \nu = 1, 2, \dots, n-1\},\ n = 2, 3, \dots$$

Случайная величина τ называется *временем первого возвращения* в состояние i.

Обозначим

$$f_{ii}(n) = P\{\tau = n | \xi_0 = i\},\ n = 1, 2, \dots,$$

значение $f_{ii}(0)$ положим равным 0 (по определению). Вероятностное распределение

$$P\{\tau = n | \xi_0 = i\} = f_{ii}(n),\ n = 0, 1, \dots,$$

будем называть *распределением времени первого возвращения в состояние* i.

По отношению ко времени первого возвращения все состояния делятся на возвратные и невозвратные.

Определение. Состояние i будем называть *возвратным*, если

$$P\{\tau < \infty | \xi_0 = i\} = 1$$

и *невозвратным*, если

$$P\{\tau < \infty | \xi_0 = i\} < 1.$$

Другими словами, состояние i возвратно, если

$$P\{\tau = \infty | \xi_0 = i\} = 0,$$

и невозвратно, если

$$P\{\tau = \infty | \xi_0 = i\} > 0.$$

Вероятность $P\{\tau < \infty | \xi_0 = i\}$ называют *вероятностью первого возвращения в состояние* i.

Так как

$$\{\tau < \infty\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{\tau = n\},$$

то вероятность первого возвращения можно записать в виде

$$P\{\tau < \infty | \xi_0 = i\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\tau = n | \xi_0 = i\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}(n),$$

её обычно обозначают через f_{ii}^*:

$$f_{ii}^* = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}(n).$$

В терминах f_{ii}^* состояние i возвратно, если

$$f_{ii}^* = 1$$

и невозвратно, если

$$f_{ii}^* < 1.$$

Среднее время возвращения

$$M\tau = \sum_{n=0}^{\infty} n f_{ii}(n)$$

у возвратного состояния может быть как конечным, так и бесконечным.

У невозвратного состояния среднее время возвращения равно бесконечности.

Производящие функции. Напомним теорему о произведении абсолютно сходящихся степенных рядов.

Теорема 1.2.1. *Если степенные ряды*

$$A(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k,\ |s| < 1,\ \textit{и}\ B(s) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l s^l,\ |s| < 1,$$

абсолютно сходятся, то абсолютно сходится и ряд

$$C(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n s^n,\ |s| < 1,$$

где

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

и имеет место равенство

$$A(s)B(s) = C(s). \tag{1.2.1}$$

Ряд $C(s)$ называется *произведением* рядов $A(s)$ и $B(s)$.

Определение. Сумму

$$A(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k,\ |s| < 1,$$

абсолютно сходящегося степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k s^k$ будем называть *производящей функцией* последовательности $\{a_k\}$.

В частности,

$$\tilde{P}_{ii}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ii}(k) s^k,\ |s| < 1,\ \ \tilde{F}_{ii}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{ii}(k) s^k,\ |s| < 1,$$

— производящие функции соответственно последовательностей $\{P_{ii}(k)\}$ и $\{f_{ii}(k)\}$.

Производящие функции $\tilde{P}_{ii}(s)$ и $\tilde{F}_{ii}(s)$ определены, т. к. при $|s| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |P_{ii}(k)s^k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |s|^k = \frac{1}{1-|s|},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f_{ii}(k)s^k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |s|^k = \frac{1}{1-|s|}.$$

Нам понадобится следующая лемма Абеля.

Лемма 1.2.1 (лемма Абеля). 1° *Если ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k s^k$, $|s| < 1$, *абсолютно сходится в точке* $s = 1$, *то существует* $\lim\limits_{s\to 1-0} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k s^k$ *и*

$$\lim_{s\to 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k. \tag{1.2.2}$$

2° *Пусть* $a_k \geq 0$, $k = 0, 1, \ldots$ *Если существует* $\lim\limits_{s\to 1-0} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k s^k$ (*конечный или бесконечный*), *то*

$$\lim_{s\to 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Доказательство. Сначала докажем утверждение 1°.

Из абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k s^k$ в точке $s = 1$, очевидно, следует абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k s^k$ при $|s| < 1$.

Для доказательства равенства (1.2.2) оценим разность

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right|$$

в окрестности точки $s = 1$. Очевидно,

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k (s^k - 1) \right| \leq$$

$$\leq \left|\sum_{k=0}^{N} a_k(s^k-1)\right| + \left|\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k(s^k-1)\right|$$

(N выберем далее).

Сначала оценим сверху

$$\left|\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k(s^k-1)\right|.$$

Запишем a_k в терминах остатков $A_k = a_k + a_{k+1} + \ldots$ ряда $\sum\limits_{l=0}^{\infty} a_l$:

$$a_k = A_k - A_{k+1}.$$

Имеем

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k(s^k-1) = \sum_{k=N+1}^{\infty} (A_k - A_{k+1})(s^k-1) =$$

$$= \sum_{k=N+1}^{\infty} A_k(s^k-1) - \sum_{k=N+1}^{\infty} A_{k+1}(s^k-1) =$$

$$= A_{N+1}(s^{N+1}-1) + \sum_{k=N+2}^{\infty} A_k(s^k-1) - \sum_{k=N+1}^{\infty} A_{k+1}(s^k-1) =$$

$$= A_{N+1}(s^{N+1}-1) + \sum_{k=N+2}^{\infty} A_k(s^k-1) - \sum_{k=N+2}^{\infty} A_k(s^{k-1}-1) =$$

$$= A_{N+1}(s^{N+1}-1) + \sum_{k=N+2}^{\infty} A_k(s^k - s^{k-1}).$$

Поскольку A_k — остаток сходящегося ряда $\sum\limits_{l=0}^{\infty} |a_l|$, то для данного $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для всех $k \geq N$ имеют место неравенства $|A_k| \leq \varepsilon$. Поэтому

$$\left|\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k(s^k-1)\right| \leq |A_{N+1}||(s^{N+1}-1)| + \sum_{k=N+2}^{\infty} |A_k||s^k - s^{k-1}| \leq$$

$$\leq \varepsilon|s^{N+1}-1| + \varepsilon \sum_{k=N+2}^{\infty} |s^{k-1}||s-1| \leq$$

$$\leq 2\varepsilon + \varepsilon|s|^{N+1}|s-1|\frac{1}{1-|s|} =$$

$$= 2\varepsilon + \varepsilon|s|^{N+1}(1-s)\frac{1}{1-s} \leq 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Осталось заметить, что $\sum\limits_{k=0}^{N} a_k(s^k-1) \to 0$ при $s \to 1$ (в силу непрерывности функции $\sum\limits_{k=0}^{N} a_k(s^k-1)$).

Убедимся теперь в справедливости утверждения 2° теоремы.

Пусть $a_k \geq 0,\ k = 0, 1, \ldots,$ и существует $\lim\limits_{s\to 1-0} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k s^k$. Рассмотрим два случая:

$$\text{a)}\ \lim_{s\to 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k = +\infty, \qquad \text{b)}\ \lim_{s\to 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k < \infty.$$

a) Из

$$\lim_{s\to 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k = +\infty$$

и неравенства

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

(при $0 < s < 1$) следует, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$, поэтому

$$\lim_{s\to 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

b) Пусть

$$\lim_{s\to 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k = a < \infty.$$

Переходя в неравенстве

$$\sum_{k=0}^{n} a_k s^k \le \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k$$

к пределу сначала при $s \to 1-0$, а потом при $n \to \infty$, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \le \lim_{s\to 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k = a < \infty.$$

Так что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ абсолютно сходится, и в силу утверждения 1° леммы

$$\lim_{s\to 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Лемма доказана.

Необходимые и достаточные условия возвратности состояния. Далее мы получим условия невозвратности и возвратности состояния i в терминах сходимости и расходимости ряда $\sum\limits_{n} P_{ii}(n)$.

Теорема 1.2.2 (необходимое и достаточное условие возвратности состояния). *Для того, чтобы состояние i было возвратным, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{ii}(n)$ расходился.*

Доказательство. Сначала докажем, что производящие функции $\tilde{P}_{ii}(s)$, $\tilde{F}_{ii}(s)$ последовательностей $\{P_{ii}(n)\}$, $\{f_{ii}(n)\}$ связаны соотношением

$$\tilde{P}_{ii}(s) = \frac{1}{1-\tilde{F}_{ii}(s)}, \ |s| < 1. \tag{1.2.3}$$

Для этого установим, что последовательности $\{P_{ii}(n)\}$, $\{f_{ii}(n)\}$ связаны соотношением

$$P_{ii}(n) = \sum_{k=0}^{n} f_{ii}(k) P_{ii}(n-k), \ n = 1, 2, \ldots, \tag{1.2.4}$$

(при $n = 0$ равенство не имеет места).

Представим событие $\{\xi_n = i, \xi_0 = i\}$ в виде объединения непересекающихся событий

$$E_1 = \{\xi_n = i, \xi_0 = i, \xi_1 = i\};$$

$$E_k = \{\xi_n = i, \xi_0 = i, \xi_k = i, \xi_\nu \neq i,\ \nu = 1, 2, \ldots, k-1\},$$

$k = 2, 3, \ldots, n$ (событие E_k состоит в том, что в моменты 0 и n цепь находится в состоянии i, и первое возвращение в состояние i происходит на k-м шаге):

$$\{\xi_n = i, \xi_0 = i\} = \bigcup_{k=1}^{n} E_k.$$

Отсюда

$$P\{\xi_n = i|\xi_0 = i\} = \sum_{k=1}^{n} P\{E_k|\xi_0 = i\}. \tag{1.2.5}$$

И поскольку

$$P\{E_k|\xi_0 = i\} =$$

$$= \frac{P\{\xi_n = i, \xi_0 = i, \xi_k = i, \xi_\nu \neq i,\ \nu = 1, 2, \ldots, k-1\}}{P\{\xi_0 = i\}} =$$

$$= P\{\xi_n = i|\xi_k = i, \xi_0 = i, \xi_\nu \neq i,\ \nu = 1, 2, \ldots, k-1\}\times$$

$$\times P\{\xi_k = i, \xi_0 = i, \xi_\nu \neq i,\ \nu = 1, 2, \ldots, k-1\}/P\{\xi_0 = i\} =$$

$$= P\{\xi_n = i|\xi_k = i\}\times$$

$$\times P\{\xi_k = i, \xi_0 = i, \xi_\nu \neq i,\ \nu = 1, 2, \ldots, k-1|\xi_0 = i\} =$$

$$= P_{ii}(n-k) f_{ii}(k),$$

$k = 2, 3, \ldots, n$, равенство (1.2.5) перепишется так:

$$P_{ii}(n) = \sum_{k=1}^{n} f_{ii}(k) P_{ii}(n-k),$$

или, учитывая что $f_{ii}(0) = 0$, так:

$$P_{ii}(n) = \sum_{k=0}^{n} f_{ii}(k) P_{ii}(n-k)$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$ (при $n = 0$ последнее равенство не имеет места).

Далее, рассмотрим произведение абсолютно сходящихся при $|s| < 1$ степенных рядов (см. теорему 1.2.1)

$$\tilde{F}_{ii}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{ii}(k) s^k \quad \text{и} \quad \tilde{P}_{ii}(s) = \sum_{l=0}^{\infty} P_{ii}(l) s^l.$$

$$\tilde{F}_{ii}(s)\tilde{P}_{ii}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} f_{ii}(k) P_{ii}(n-k) \right) s^n =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{0} f_{ii}(k) P_{ii}(0-k) \right) s^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} f_{ii}(k) P_{ii}(n-k) \right) s^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}(n) s^n = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}(n) s^n + P_{ii}(0) s^0 - P_{ii}(0) s^0 =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}(n) s^n - 1 = \tilde{P}_{ii}(s) - 1.$$

Отсюда и получаем, что

$$\tilde{P}_{ii}(s) = \frac{1}{1 - \tilde{F}_{ii}(s)}.$$

Далее, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_{ii}(n) = f_{ii}^*$ сходится абсолютно ($f_{ii}^* \le 1$), поэтому в силу леммы Абеля (см. лемму 1.2.1), во-первых, существует предел

$$\lim_{s \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}(n) s^n = \lim_{s \to 1-0} \tilde{F}_{ii}(s)$$

и, во-вторых, этот предел равен $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_{ii}(n) = f_{ii}^*$, т. е.

$$\lim_{s \to 1-0} \tilde{F}_{ii}(s) = f_{ii}^*$$

(для возвратного состояния i значение $f_{ii}^* = 1$, для невозвратного $f_{ii}^* < 1$). Из существования $\lim\limits_{s\to 1-0} \tilde{F}_{ii}(s) = f_{ii}^*$ и равенства (1.2.3) следует, что при $s \to 1-0$ существует

$$\lim_{s\to 1-0} \tilde{P}_{ii}(s) = \lim_{s\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}(n) s^n,$$

(бесконечный, если $f_{ii}^* = 1$, и конечный, если $f_{ii}^* < 1$), а из леммы Абеля следует, что

$$\lim_{s\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}(n) s^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}(n).$$

Так что если $f_{ii}^* = 1$ (i возвратно), то

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}(n) = \infty,$$

если $f_{ii}^* < 1$ (i невозвратно), то

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}(n) < \infty.$$

Следствие. *Для того чтобы состояние i было невозвратно, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{ii}(n)$ сходился.*

Ненулевые состояния; нулевые состояния, нулевые возвратные и нулевые невозвратные состояния. Состояние i называется *ненулевым*, если $P_{ii}(n)$ не стремится к нулю при $n \to \infty$.

Ненулевое состояние i всегда возвратно, поскольку для него ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{ii}(n)$ расходится.

Состояние i называется *нулевым*, если при $n \to \infty$

$$P_{ii}(n) \to 0.$$

Нулевое состояние i может быть как возвратным, так и невозвратным — ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{ii}(n)$ с общим членом $P_{ii}(n)$, стремящимся к нулю, может как сходиться, так и расходиться.

Заметим, что *возвратное состояние i может быть как нулевым, так и ненулевым* — у расходящегося ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{ii}(n)$ общий член $P_{ii}(n)$ может как стремиться к нулю, так и не стремиться.

Невозвратное состояние i является нулевым, поскольку для невозвратного состояния i ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{ii}(n)$ сходится.

1.3 Существенные состояния. Классы эквивалентности

Определение. Будем говорить, что состояние j *достижимо* из состояния i (обозначение $i \to j$), если найдется такое $n \geq 0$, что $P_{ij}(n) > 0$, другими словами, j достижимо из i, если из i можно попасть в j (с ненулевой вероятностью).

Поскольку $P_{ii}(0) = 1$, то i всегда достижимо из i.

Транзитивность свойства достижимости: *если j достижимо из i, а k достижимо из j, то k достижимо из i.*

Действительно, из уравнения Колмогорова—Чепмена (следствие 2) имеем

$$P_{ik}(n+m) \geq P_{ij}(n)P_{jk}(m).$$

И так как $i \to j$, а $j \to k$, то найдутся такие $n > 0$ и $m > 0$, что $P_{ij}(n) > 0$, $P_{jk}(m) > 0$, поэтому

$$P_{ik}(n+m) \geq P_{ij}(n)P_{jk}(m) > 0.$$

Неравенство

$$P_{ik}(n+m) > 0$$

обозначает, что k достижимо из i.

Определение. Состояния i и j будем называть *сообщающимися*, если i достижимо из j, и j достижимо из i.

Тот факт, что состояния i и j сообщающиеся, будем обозначать так: $i \leftrightarrow j$.

Из определения следует, что если состояния i и j не являются сообщающимися, то либо $P_{ij}(n) = 0$ для всех $n > 0$, либо $P_{ji}(m) = 0$ для всех $m > 0$.

Из транзитивности свойства достижимости следует транзитивность свойства сообщаемости: *если $i \leftrightarrow j$ и $j \leftrightarrow k$, то $i \leftrightarrow k$.*

Определение. Состояние i называется *существенным*, если для каждого состояния j, достижимого из i, состояние i достижимо из j.

Состояние i существенное, если, стартовав из i, в i всегда можно вернуться.

Определение. Состояние i называется *несущественным*, если найдется состояние j, достижимое из i, из которого i не достижимо.

Состояние i несущественное, если найдется состояние j, в которое из i можно попасть, но обратно в i вернуться невозможно.

Несущественное состояние i является невозвратным и, как следствие, нулевым.

В самом деле, если i — несущественное состояние, то найдется состояние j, достижимое из i с ненулевой вероятностью p такое, что состояние i не достижимо из j. Поэтому вероятность $P\{\tau = +\infty | \xi_0 = i\}$ не меньше p и, следовательно,

$$P\{\tau < \infty | \xi_0 = i\} < 1,$$

т. е. i — невозвратное состояние.

Классы эквивалентности. Множество всех состояний марковской цепи "распадается" на несущественные состояния и существенные, последние, в свою очередь, образуют непересекающиеся между собой классы существенных сообщающихся состояний.

Теорема 1.3.1. *Множество всех существенных состояний марковской цепи представимо в виде объединения непересекающиеся классов, каждый из которых состоит из сообщающихся между собой состояний.*

Доказательство. Для каждого существенного состояния i рассмотрим класс состояний S_i, включающий в себя состояние i и все существенные состояния, с ним сообщающиеся. Так определенные классы либо не пересекаются, либо совпадают.

Если S_i и S_j пересекаются, то они совпадают. В самом деле, пусть $k \in S_i \cap S_j$. Тогда для любого состояния $l \in S_i$ имеем: $l \leftrightarrow i \leftrightarrow k \leftrightarrow j$, т. е. $l \leftrightarrow j$. Последнее обозначает, что $l \in S_j$. И так как l произвольное из класса S_i, то $S_i \subset S_j$. Аналогично имеем $S_j \subset S_i$, поэтому $S_i = S_j$.

Определение. Класс всех существенных сообщающихся между собой состояний марковской цепи называется *классом эквивалентности.*

Классы эквивалентности мы, как правило, будем обозначать буквой C, возможно с индексами.

Определение. Марковская цепь, все состояния которой образуют один класс существенных сообщающихся состояний, называется *неприводимой или неразложимой* марковской цепью.

Если марковская цепь содержит несущественные состояния или более одного класса существенных сообщающихся состояний (или и то, и другое), то ее называют *приводимой* (*разложимой*) марковской цепью.

В неприводимой марковской цепи каждое состояние достижимо из каждого.

Если в матрице одношаговых переходных вероятностей вычеркнуть строки и столбцы, соответствующие состояниям, не входящим в данный класс эквивалентности, то полученная матрица будет стохастической.

Марковская цепь, попав в класс эквивалентности, покинуть его не может.

Марковскую цепь, полученную из данной цепи сужением ее фазового пространства X до класса эквивалентности C $(C \subset X)$, также будем называть классом эквивалентности. Матрица переходных вероятностей этой цепи получается из матрицы переходных вероятностей $[P_{ij}]$ данной цепи и имеет вид $[P_{ij}]$, $i, j \in C$.

Определение. Пусть M_i — множество положительных чисел m, для которых $P_{ii}(m) > 0$. Наибольший общий делитель $d(i)$ совокупности M_i будем называть *периодом состояния* i. Если $M_i = \emptyset$, то по определению полагаем $d(i) = 0$. Если $d(i) = 1$, то состояние i будем называть *непериодическим.*

Из того, что состояние i периодично с периодом d, не следует, что $P_{ii}(d) > 0$.

Пример. Марковская цепь с фазовым пространством $X = \{1, 2, \ldots, 7\}$ и матрицей переходных вероятностей

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

имеет период 2, но $P_{ii}(2) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, 7$.

Теорема 1.3.2 (солидарности). *В неприводимой марковской цепи все состояния принадлежат одному типу:* 1) *если одно возвратно, то все возвратны;* 2) *если одно нулевое, то все нулевые;* 3) *если одно периодично с периодом d, то все периодичны с периодом d.*

Доказательство. Пусть i и j — различные состояния. Для любых n, s, m

$$P_{ii}(n+s+m) \geq P_{ij}(n)P_{jj}(s)P_{ji}(m)$$

(в силу следствия 4 из уравнение Колмогорова–Чепмена). Так как цепь неприводимая, то найдутся числа n и m (зафиксируем их), такие что

$$P_{ij}(n) = \alpha > 0,\ P_{ji}(m) = \beta > 0,$$

поэтому

$$P_{ii}(n+s+m) \geq \alpha\beta P_{jj}(s). \tag{1.3.1}$$

Аналогично

$$P_{jj}(m+r+n) \geq \alpha\beta P_{ii}(r). \tag{1.3.2}$$

Поскольку r и s произвольны, то можно выбрать r так, чтобы $m+r+n=s$. Тогда последнее неравенство перепишется так:

$$P_{jj}(s) \geq \alpha\beta P_{ii}(s-(n+m)). \tag{1.3.3}$$

Из неравенств (1.3.1) и (1.3.3) имеем

$$\alpha\beta P_{ii}(s-(n+m)) \leq P_{jj}(s) \leq \frac{1}{\alpha\beta}P_{ii}(s+(n+m)).$$

Отсюда следует, что асимптотические свойства $P_{ii}(k)$ и $P_{jj}(k)$ одинаковы: если $P_{ii}(k) \to 0$ (состояние i нулевое), то ясно, что и $P_{jj}(k) \to 0$ (состояние j нулевое); если

$$\sum_k P_{ii}(k) = \infty$$

(состояние i возвратное), то и

$$\sum_k P_{jj}(k) = \infty$$

(состояние j возвратное).

Установим, что $d(i) = d(j)$ — все состояния имеют один и тот же период.

В силу неприводимости цепи найдется r такое, что

$$P_{ii}(r) > 0,$$

и такие n и m, что

$$P_{jj}(m+r+n) \geq \alpha\beta P_{ii}(r) > 0,$$

а вместе с ними и

$$P_{jj}(m+2r+n) \geq \alpha\beta P_{ii}(2r) \geq \alpha\beta P_{ii}(r)P_{ii}(r) > 0$$

(см. (1.3.2)), т. е.

$$P_{jj}(m+2r+n) > 0 \ \text{ и } \ P_{jj}(m+r+n) > 0.$$

Из определения периода $d(j)$ состояния j следует, что $d(j)$ — делитель чисел $(m+r+n)$ и $(m+2r+n)$, а, следовательно, и числа $(m+2r+n)-(m+r+n)=r$. Так что $d(j)$ — делитель чисел $r>0$, для которых $P_{ii}(r)>0$, а $d(i)$, как период i, — наибольший общий делитель таких чисел, поэтому $d(j) \leq d(i)$. Аналогично $d(i) \leq d(j)$, следовательно $d(i)=d(j)$.

Тем самым теорема доказана.

Из теоремы солидарности следует корректность таких определений.

Определение. Неприводимую марковскую цепь будем называть *ненулевой*, если хотя бы одно ее состояние ненулевое, *нулевой*, если хотя бы одно ее состояние нулевое, *возвратной*, если хотя бы одно ее состояние возвратное, *периодической* с периодом d, если хотя бы одно ее состояние периодическое с периодом d, и т. д.

Аналогично класс эквивалентности будем называть *ненулевым*, если хотя бы одно его состояние ненулевое, *нулевым*, если хотя бы одно его состояние нулевое, *возвратным*, если хотя бы одно его состояние возвратное, и т. д.

Теорема 1.3.3. *В нулевом классе эквивалентности для любых i, j*

$$P_{i,j}(m) \to 0$$

при $m \to +\infty$.

Доказательство. Действительно

$$P_{jj}(n+m) \geq P_{ji}(n)P_{ij}(m). \tag{1.3.4}$$

Поскольку i, j принадлежат одному и тому же классу эквивалентности, найдется n, что $P_{ji}(n) > 0$. Поэтому из неравенства (1.3.4), учитывая, что $P_{jj}(n+m) \to 0$ при $m \to +\infty$, получаем, что и $P_{ij}(m) \to 0$ при $m \to +\infty$.

Теорема 1.3.4 (асимптотика нулевой цепи). *Неприводимая нулевая марковская цепь $\{\xi_n\}$ с фазовым пространством $X = \{0, 1, 2, \ldots\}$ при $n \to +\infty$ сходится по вероятности к $+\infty$: для любого $M > 0$ при $n \to \infty$*

$$P\{\xi_n \geq M\} \to 1.$$

Доказательство. Для произвольного фиксированного M оценим $P\{\xi_n \leq M\}$, воспользовавшись (1.1.8):

$$P\{\xi_n \leq M\} = \sum_{i=0}^{M} P\{\xi_n = i\} = \sum_{i=0}^{M} \sum_{k=0}^{\infty} p_k P_{ki}(n) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p_k \sum_{i=0}^{M} P_{ki}(n) = \sum_{k=0}^{K} p_k \sum_{i=0}^{M} P_{ki}(n) + \sum_{k=K+1}^{\infty} p_k \sum_{i=0}^{M} P_{ki}(n) \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{K} p_k \sum_{i=0}^{M} P_{ki}(n) + \sum_{k=K+1}^{\infty} p_k.$$

Последнее слагаемое можно сделать меньше данного ε за счет выбора K, а первое слагаемое за счет выбора n — в неприводимой нулевой марковской цепи для любых k, i при $n \to +\infty$

$$P_{ki}(n) \to 0.$$

Тем самым теорема доказана.

Следствие. *Невозвратная неприводимая марковская цепь $\{\xi_n\}$ с фазовым пространством $X = \{0, 1, 2, \ldots\}$ при $n \to +\infty$ сходится по вероятности к $+\infty$: для любого $M > 0$ при $n \to \infty$*

$$P\{\xi_n \geq M\} \to 1.$$

Доказательство. Невозвратная марковская цепь является нулевой.

Замечание. Теорема и следствие имеют место и для марковской цепи с фазовым пространством $X = \{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

Пример 1.3.1. *Марковская цепь с фазовым пространством $X = \{1, 2, 3\}$ описывается матрицей одношаговых переходных вероятностей*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Классифицировать состояния цепи (указать существенные, несущественные, периодические, непериодические состояния).

Р е ш е н и е. Состояние 1 имеет период, равный нулю.

Состояние i заведомо непериодическое, если с ненулевой вероятностью из i можно вернуться в i за один шаг. Поэтому состояния 2 и 3 — непериодические.

Состояние 2 достижимо из состояния 1. Состояние 1 недостижимо ни из 2, ни из 3. Состояние 1 несущественное, состояния 2 и 3 — существенные. Состояния 2 и 3 сообщающиеся, 1 и 2 — несообщающиеся. Цепь приводима, поскольку в ней имеются несущественные состояния.

П р и м е р 1.3.2. *Классифицировать состояния марковской цепи, описывающей азартную игру, см. пример* 1.1.2 (*с.* 13).

Р е ш е н и е. Если капитал игрока G_M конечен (равен M), то состояния 0 и $n\,(n = m + M)$ являются поглощающими экранами; состояния $1, 2, \ldots, n - 1$ являются несущественными, а, следовательно, и невозвратными.

Если капитал игрока G_M бесконечен, то состояние 0 является поглощающим экраном; состояния $1, 2, \ldots,$ являются несущественными и невозвратными.

П р и м е р 1.3.3 (одномерное случайное блуждание, продолжение). *Рассмотрим одномерное случайное блуждание по целочисленной решетке — марковскую цепь, описывающую движение частицы, которая за единицу времени перемещается с вероятностью p на единицу вправо и с вероятностью q на единицу влево $(p + q = 1)$; состояние ξ_n цепи — координата частицы в момент времени n (см. также пример* 1.1.1).

Исследовать на возвратность состояния описанной марковской цепи.

Р е ш е н и е. Поскольку цепь неприводимая, достаточно исследовать на возвратность, например, состояние 0. Необходимым и достаточным условием возвратности состояния 0 является расходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{00}(n)$. Исследуем этот ряд на сходимость. Очевидно, $P_{00}(2n + 1) = 0$. Поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{00}(n) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{00}(2n).$$

Выпишем подробнее выражение для $P_{00}(2n)$. Вероятность того, что цепь, стартовав из состояния 0 $(P\{\xi_0 = 0\} = p_0 = 1)$, вернется в состояние 0, пройдя по данному пути

$$\{\xi_0 = 0, \xi_1 = i_1, \dots, \xi_{2n-1} = i_{2n-1}, \xi_{2n} = 0\},$$

равна

$$P\{\xi_0 = 0, \xi_1 = i_1, \dots, \xi_{2n} = 0 | \xi_0 = 0\} = p_0 P_{0i_1} P_{i_1 i_2} \dots P_{i_{2n-1}0} =$$

$$= P_{0i_1} P_{i_1 i_2} \dots P_{i_{2n-1}0}$$

(см. (1.1.7)). При этом число перемещений вправо равно числу перемещений влево. Поэтому в последнем произведении n сомножителей равно p и n сомножителей — q. Само произведение $P_{0i_1} P_{i_1 i_2} \dots P_{i_{2n-1}0}$ равно $p^n q^n$. Путь из 0 в 0 длиной $2n$ определяется словом длиной $2n$, составленным из двух букв: П — вправо и Л — влево. Число всех таких слов, а вместе с ними и путей из 0 в 0, равно C_{2n}^n. И, следовательно,

$$P_{00}(2n) = C_{2n}^n p^n q^n = \frac{(2n)!}{n!n!} p^n q^n.$$

Далее, воспользовавшись формулой Стирлинга:

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \quad \text{при } n \to \infty,$$

получим, что при $n \to \infty$

$$P_{00}(2n) = \frac{(2n)!}{n!n!} p^n q^n \sim$$

$$\sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2\pi 2n}}{(n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n})^2} p^n q^n = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} (pq)^n = \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}},$$

т. е.

$$P_{00}(2n) \sim \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}. \tag{1.3.5}$$

Поэтому оба ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{00}(2n) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$$

сходятся или оба являются расходящимися.

Рассмотрим общий член $\dfrac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$ ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$. Произведение pq $(0 \le p \le 1,\ 0 \le q \le 1)$ принимает наибольшее значение, равное $1/4$, при $p = q = 1/2$, что следует из равенств

$$pq = p(1-p) = p - p^2,\ 0 \le p \le 1.$$

Поэтому $0 \le 4pq \le 1$, и $4pq = 1$ только при $p = q = 1/2$.

Следовательно, при $p = q = 1/2$

$$\frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

а ряд с таким общим членом расходится.

Если $p \ne q$, то $4pq = c < 1$. Ряд с общим членом $c^n/\sqrt{\pi n}$ $(c < 1)$ является сходящимся.

Итак, при $p = q = 1/2$ марковская цепь возвратна, а при $p \ne q$ невозвратна (заключение о возвратности или невозвратности цепи мы делаем по возвратности или невозвратности состояния 0, поскольку цепь неприводимая).

Конечные цепи Маркова. Далее посмотрим, что можно сказать о состояниях марковской цепи, если цепь конечна — конечно ее фазовое пространство.

Теорема 1.3.5. *Конечная неприводимая цепь Маркова является ненулевой.*

Доказательство. Пусть M — число состояний конечной неприводимой цепи. Стартуя из состояния i, за n шагов цепь с вероятностью 1 окажется в одном из своих возможных состояний, поэтому

$$\sum_{j=1}^{M} P_{ij}(n) = 1. \tag{1.3.6}$$

Если предположить, что цепь нулевая, то для любых i, j из фазового пространства

$$P_{ij}(n) \to 0$$

при $n \to \infty$ (см. теорему 1.3.3). Переходя в равенстве (1.3.6) к пределу при $n \to \infty$, получаем противоречие: $0 = 1$. Так что в конечной цепи все состояния ненулевые.

Следствие 1. *Конечная неприводимая марковская цепь возвратна.*

Поскольку в конечной неприводимой марковской цепи каждое состояние i ненулевое — $P_{ii}(n)$ при $n \to \infty$ не стремится к нулю, то ряд $\sum\limits_n P_{ii}(n)$ расходится, и, следовательно, состояние i возвратно.

Следствие 2. *Невозвратный класс эквивалентности не может быть конечным.*

Теорема. *В конечной марковской цепи хотя бы одно состояние существенное.*

Доказательство. Обозначим через $X = \{1, 2, \ldots, M\}$ фазовое пространство конечной марковской цепи. Предположим, что все состояния цепи несущественные. Пусть в начальный момент цепь находится в состоянии i_1. Так как i_1 — несущественное, то найдется состояние i_2, в которое из i_1 можно попасть с ненулевой вероятностью, но вернуться из i_2 в i_1 невозможно. Состояние i_2 также несущественное, поэтому найдется состояние i_3, в которое из i_2 можно попасть, но вернуться в i_2 невозможно, невозможно из i_3 попасть и в i_1, так как тогда из i_2 можно было бы вернуться в i_1 (через i_3), что невозможно, и так далее. За M или меньшее число шагов мы окажемся в некотором состоянии i_m $(m \leq M)$, из которого нельзя попасть в i_1,$i_2, \ldots$, i_{m-1} по построению, а в другие (если такие еще останутся) нельзя попасть, в силу их недостижимости из i_m. Поэтому цепь с вероятностью 1 остается в состоянии i_m, т. е. за каждый последующий шаг она переходит с вероятностью 1 из i_m в i_m. Последнее обозначает, что i_m — существенное состояние. Полученное противоречие и доказывает утверждение.

Возвратные и невозвратные классы. Понятие возвратности состояния введено безотносительно к другим состояниям цепи. Здесь мы рассмотрим возвратные и невозвратные классы состояний.

Пусть $j \neq i$. Введем обозначения

$$f_{ij}(k) = P\{\xi_0 = i, \xi_k = j, \xi_\nu \neq j,\ \nu = 1, 2, \ldots, k-1 | \xi_0 = i\},$$

$k = 2, 3, \ldots$, для $k = 0$ и 1 положим

$$f_{ij}(0) = 0,\ f_{ij}(1) = P\{\xi_0 = i, \xi_1 = j | \xi_0 = i\};$$

$f_{ij}(k)$ — вероятность первого достижения состояния j из состояния i на k-м шаге.

Обозначим вероятность достижения j из i $(j \neq i)$ через f^*_{ij}, ясно, что

$$f^*_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} f_{ij}(k).$$

Мы часто будем пользоваться приведенными далее соотношениями между f^*_{ii} и f^*_{ij}, когда i, j принадлежат данному классу эквивалентности.

Уравнения для $\boldsymbol{f^*_{ij}}$ и для $\boldsymbol{f^*_{ii}}$. *Для i, j из одного класса эквивалентности при каждом n $(n = 1, 2, \ldots)$*

$$f^*_{ij} = P_{ij}(n) + \sum_{k \in X \setminus \{j\}} P_{ik}(n) f^*_{kj}. \tag{1.3.7}$$

Для состояний i из данного класса эквивалентности при каждом n $(n = 1, 2, \ldots)$

$$f^*_{ii} = P_{ii}(n) + \sum_{k \in X \setminus \{i\}} P_{ik}(n) f^*_{ki}. \tag{1.3.8}$$

Далее через $\tilde{P}_{ij}(s)$ будем обозначать производящую функцию последовательности $\{P_{ij}(n)\}$:

$$\tilde{P}_{ij}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ij}(k) s^k, \ |s| < 1,$$

а через $\tilde{F}_{ij}(s)$ — производящую функцию последовательности $\{f_{ij}(n)\}$:

$$\tilde{F}_{ij}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{ij}(k) s^k, \ |s| < 1.$$

Аналогично тому, как было получено соотношение (1.2.4), получаем

$$P_{ij}(n) = \sum_{k=0}^{n} f_{ij}(k) P_{jj}(n-k), \ n \geq 0, \ j \neq i. \tag{1.3.9}$$

Из теоремы о произведении степенных рядов (теорема 1.2.1) и равенства (1.3.9), аналогично тому как было получено соотношение (1.2.3) между производящими функциями $\tilde{P}_{ii}(s)$ и $\tilde{F}_{ii}(s)$, получаем

$$\tilde{P}_{ij}(s) = \tilde{F}_{ij}(s) \tilde{P}_{jj}(s), \ |s| < 1. \tag{1.3.10}$$

Теорема 1.3.6 (необходимые и достаточные условия невозвратности состояния в классе). *Пусть i, j принадлежат одному классу эквивалентности. Для того, чтобы состояние j было невозвратным, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{ij}(n)$ сходился.*

Доказательство. Поскольку $f_{ij}^* = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_{ij}(k) \le 1$, то в силу леммы Абеля всегда существует $\lim\limits_{s\to 1-0} \tilde{F}_{ij}(s)$ и

$$\lim_{s\to 1-0} \tilde{F}_{ij}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{ij}(k).$$

Если j — невозвратное состояние, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{jj}(n)$ сходится, и в силу леммы Абеля

$$\lim_{s\to 1-0} \tilde{P}_{jj}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}(n).$$

Поэтому при $s \to 1-0$ существует конечный предел правой части равенства

$$\tilde{P}_{ij}(s) = \tilde{F}_{ij}(s)\tilde{P}_{jj}(s),$$

а, следовательно, и левой, и в силу леммы Абеля

$$\lim_{s\to 1-0} \tilde{P}_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}(n).$$

Так что если j невозвратно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{ij}(n)$ сходится.

Установим, что из сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{ij}(n)$ следует невозвратность состояния j.

Из равенства (1.3.10) имеем

$$\tilde{P}_{jj}(s) = \tilde{P}_{ij}(s)/\tilde{F}_{ij}(s). \tag{1.3.11}$$

Из сходимости рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{ij}(n)$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_{ij}(k)$ следует существование конечных пределов $\lim\limits_{s\to 1-0} \tilde{P}_{ij}(s)$ и $\lim\limits_{s\to 1-0} \tilde{F}_{ij}(s)$ (см. лемму Абеля), а вместе с ними существование конечного предела $\lim\limits_{s\to 1-0} \tilde{P}_{jj}(s)$ (см. равенство (1.3.11)). Поэтому в силу леммы Абеля ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{jj}(n)$ сходится, а, следовательно, состояние j невозвратно.

Следствие 1. *Пусть i, j принадлежат одному классу эквивалентности. Для того, чтобы состояние j было возвратным, необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{ij}(n)$ расходился.*

Следствие 2. *Для любых i, j из невозвратного класса эквивалентности при $n \to \infty$*

$$P_{ij}(n) \to 0.$$

Коль скоро состояние j невозвратное, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{ij}(n)$ сходится и, следовательно, $P_{ij}(n) \to 0$.

Теорема 1.3.7 (f_{ji}^* в невозвратном классе). *В невозвратной неприводимой марковской цепи для каждого i из фазового пространства X найдется состояние $j \in X$, $j \neq i$ такое, что*

$$f_{ji}^* < 1.$$

Доказательство. Из равенства (1.3.8) при $n = 1$ имеем

$$f_{ii}^* = P_{ii} + \sum_{k\in X\setminus\{i\}} P_{ik} f_{ki}^*.$$

Если предположить, что в невозвратной цепи $f_{ki}^* = 1$ для всех $k \in X \setminus \{i\}$, то последнее равенство можно переписать так:

$$f_{ii}^* = P_{ii} + \sum_{k\in X\setminus\{i\}} P_{ik}$$

или так:

$$f_{ii}^* = \sum_{k\in X} P_{ik}.$$

Отсюда имеем

$$f_{ii}^* = 1,$$

что противоречит невозвратности цепи.

Следствие. *Если в неприводимой марковской цепи найдется состояние i такое, что для любого $j \neq i$ значение $f_{ji}^* = 1$, то цепь возвратна.*

Доказательство. В невозвратной цепи для каждого i найдется j, такое, что $f_{ji}^* < 1$.

Теорема 1.3.8 (f_{ji}^* в возвратном классе). *В возвратной неприводимой марковской цепи для каждой пары j, i из фазового пространства X значения*

$$f_{ji}^* = 1.$$

Доказательство. Для каждого n $(n = 1, 2, \dots)$

$$f_{ii}^* = P_{ii}(n) + \sum_{k \in X \setminus \{i\}} P_{ik}(n) f_{ki}^*$$

(см. равенство (1.3.8)), а поскольку цепь возвратна, т. е. $f_{ii}^* = 1$, то для каждого n $(n = 1, 2, \dots)$

$$P_{ii}(n) + \sum_{k \in X \setminus \{i\}} P_{ik}(n) f_{ki}^* = 1. \tag{1.3.12}$$

С другой стороны, для каждого n $(n = 1, 2, \dots)$

$$P_{ii}(n) + \sum_{k \in X \setminus \{i\}} P_{ik}(n) = 1. \tag{1.3.13}$$

Вычитая последовательно из равенства (1.3.13) равенство (1.3.12), получим

$$\sum_{k \in X \setminus \{i\}} P_{ik}(n)(1 - f_{ki}^*) = 0. \tag{1.3.14}$$

для всех $n = 1, 2, \dots$ Если предположить, что найдется пара j, i $(j \neq i)$, у которой $f_{ji}^* < 1$, то из равенства (1.3.14) следует, что для всех $n = 1, 2, \dots$ значения $P_{ij}(n)$ должны быть равны нулю. Но цепь неприводима, поэтому найдется хотя бы одно n, для которого $P_{ij}(n) > 0$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Так что в возвратном классе эквивалентности для любых j, i значение $f^*_{ji} = 1$.

Следствие. *Если в классе эквивалентности найдется пара состояний i, j таких, что $f^*_{ij} < 1$, то класс является невозвратным.*

В самом деле, в возвратном классе $f^*_{ij} = 1$ для любых i, j.

Теорема (о вероятности посещения состояния). *Марковская цепь с вероятностью 1 посещает возвратное состояние бесконечно много раз, а невозвратное с вероятностью 1 посещает конечное число раз.*

Доказательство. Введем обозначения

$$A^*_{ii} = \{\text{цепь посещает состояние } i \text{ бесконечно много раз}\},$$

$$A^{(N)}_{ii} = \{\text{цепь посещает состояние } i \text{ не менее } N \text{ раз}\}.$$

Ясно, что

$$A^{(N+1)}_{ii} \subset A^{(N)}_{ii}, \ N = 1, 2, \ldots,$$

$$A^*_{ii} = \bigcap_{N=1}^{\infty} A^{(N)}_{ii},$$

в справедливости равенства убеждаемся непосредственной проверкой.

Вычислим $P(A^*_{ii}|\xi_0 = i)$. Воспользуемся свойством непрерывности вероятности:

$$P(A^*_{ii}|\xi_0 = i) = \lim_N P(A^{(N)}_{ii}|\xi_0 = i).$$

Обозначим

$$Q^{(N)}_{ii} = P(A^{(N)}_{ii} \,|\, \xi_0 = i).$$

Очевидно,

$$Q^{(N)}_{ii} = Q^{(N-1)}_{ii} f^*_{ii}, \ N = 2, 3, \ldots$$

Отсюда

$$Q^N_{ii} = (f^*_{ii})^N, \ N = 2, 3, \ldots$$

$$P(A^*_{ii}|\xi_0 = i) = \lim_N Q^{(N)}_{ii} = \lim_N (f^*_{ii})^N.$$

Поэтому если состояние i возвратно, т. е. $f_{ii}^* = 1$, то

$$P(A_{ii}^*|\xi_0 = i) = 1,$$

а если состояние i невозвратно, т. е. $f_{ii}^* < 1$, то

$$P(A_{ii}^*|\xi_0 = i) = 0.$$

Тем самым теорема доказана.

Резюме. *Состояния марковской цепи делятся на несущественные и существенные.*

Множество существенных состояний распадается на непересекающиеся классы существенных сообщающихся между собой состояний — классы эквивалентности.

Каждый класс эквивалентности является нулевым или ненулевым.

Нулевой класс эквивалентности может быть как возвратным, так и невозвратным.

Периодические цепи. Пусть $\{\xi_k\}$ — марковская цепь. Для данного фиксированного целого $t > 0$ определим последовательность случайных величин $\{\zeta_k\}$:

$$\zeta_k = \xi_{kt},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Последовательность $\{\zeta_k\}$ образует марковскую цепь — для $\{\zeta_k\}$ выполняется марковское свойство.

Пусть $\mathbb{P} = [P_{ij}]$ — матрица переходных вероятностей марковской цепи $\{\xi_k\}$:

$$P_{ij} = P\{\xi_{k+1} = j|\xi_k = i\},\ i, j \in X,$$

а $\mathbb{Q} = [Q_{ij}]$ — матрица переходных вероятностей марковской цепи $\{\zeta_k\}$:

$$Q_{ij} = P\{\zeta_{k+1} = j|\zeta_k = i\},\ i, j \in X.$$

Из определения цепи $\{\zeta_k\}$ имеем

$$Q_{ij} = P\{\zeta_{k+1} = j|\zeta_k = i\} = P\{\xi_{(k+1)t} = j|\xi_{kt} = i\} =$$

$$= P\{\xi_{kt+t} = j|\xi_{kt} = i\} = P_{ij}(t),$$

т. е.

$$Q_{ij} = P_{ij}(t),\ i, j \in X,$$

или в матричной форме

$$\mathbb{Q} = \mathbb{P}(t) = (\mathbb{P})^t.$$

Для любого целого $s \geq 0$

$$Q_{ij}(s) = P\{\zeta_{k+s} = j|\zeta_k = i\} = P\{\xi_{(k+s)t} = j|\xi_{kt} = i\} =$$

$$= P\{\xi_{kt+st} = j|\xi_{kt} = i\} = P_{ij}(st),$$

т. е.

$$Q_{ij}(s) = P_{ij}(st),\ i, j \in X, \tag{1.3.15}$$

или в матричной форме

$$\mathbb{Q}(s) = \mathbb{P}(st).$$

Марковскую цепь с матрицей переходных вероятностей $\mathbb{P}$ будем называть $\mathbb{P}$-*цепью.*

Из определения $\mathbb{P}$-цепи $\{\xi_k\}$, $\mathbb{Q}$-цепи $\{\zeta_k\}$ и равенства

$$Q_{ij}(s) = P_{ij}(st),\ i, j \in X,$$

следует, что *состояние j достижимо из i в $\mathbb{Q}$-цепи за s шагов тогда и только тогда, когда в $\mathbb{P}$-цепи j достижимо из i за st шагов.*

Теорема 1.3.9 (о структуре периодической марковской цепи). 1° *В неприводимой периодической с периодом t марковской $\mathbb{P}$-цепи фазовое пространство G представимо в виде объединения t непересекающихся классов $G_0, G_1, \ldots, G_{t-1}$, $\mathbb{P}$-цепь за один шаг из класса G_ν переходит в класс $G_{\nu+1}$ ($\nu = 0, 1, \ldots \ldots, t-2$), из класса G_{t-1} в класс G_0; за st ($s = 1, 2, \ldots$) шагов $\mathbb{P}$-цепь из класса G_ν переходит в класс G_ν.*

2° *В $\mathbb{Q}$-цепи ($\mathbb{Q} = \mathbb{P}(t)$) каждый из классов $G_0, G_1, \ldots, G_{t-1}$ является непериодическим классом эквивалентности.*

3° *Если $\mathbb{P}$-цепь возвратна, то каждый из классов эквивалентности $G_0, G_1, \ldots, G_{t-1}$ в $\mathbb{Q}$-цепи является возвратным.*

Доказательство. Сначала докажем, что для периодической с периодом t марковской цепи имеет место следующее свойство:

Лемма. *Если состояние i достижимо из состояния j за n_1 и за n_2 шагов ($P_{ji}(n_1) > 0$, $P_{ji}(n_2) > 0$), то n_1 и n_2 представимы в виде*

$$n_1 = \nu + s_1 t,\ n_2 = \nu + s_2 t,\ 0 \le \nu \le t-1, \tag{1.3.16}$$

причем ν определяется единственным образом.

Из следствия 2 теоремы 1.1.1 (уравнение Колмогорова–Чепмена) имеем

$$P_{jj}(n_1 + m) \ge P_{ji}(n_1) P_{ij}(m),$$
$$P_{jj}(n_2 + m) \ge P_{ji}(n_2) P_{ij}(m).$$

Из неприводимости цепи следует существование хотя бы одного m, для которого $P_{ij}(m) > 0$, далее m минимальное из таких чисел (оно единственно). Поэтому

$$P_{jj}(n_1 + m) > 0,$$
$$P_{jj}(n_2 + m) > 0.$$

Отсюда, поскольку цепь периодична с периодом t, следуют представления

$$n_1 + m = s_1' t,$$
$$n_2 + m = s_2' t,$$

или

$$n_1 = s_1' t - m,$$
$$n_2 = s_2' t - m.$$

или

$$n_1 = (s_1' t - st) + (st - m) = s_1 t + \nu,$$
$$n_2 = (s_2' t - st) + (st - m) = s_2 t + \nu,$$

где $\nu = st - m$. Выбрав s так, чтобы ν лежало между 0 и $t-1$ (такое ν определяется единственным образом), получим требуемое представление.

Тем самым лемма доказана.

Представление

$$n = \nu + st, \quad 0 \le \nu \le t-1,$$

для числа n шагов, за которое в периодической с периодом t цепи состояние i достижимо из состояния j, дает возможность разбить фазовое пространство G марковской цепи на t непересекающихся классов следующим образом. Поскольку цепь неприводима, то каждое состояние достижимо из состояния 1, причем в силу леммы только за число шагов вида

$$n = \nu + st, \quad 0 \le \nu \le t-1.$$

Отнесем в класс G_0 все состояния марковской цепи, достижимые из состояния 1 за
$$n = 0 + st$$
шагов. В класс G_1 отнесем все состояния, достижимые из 1 за
$$n = 1 + st$$
шагов, и т. д., в класс G_ν отнесем все состояния, достижимые из 1 за
$$n = \nu + st$$
шагов $(0 \le \nu \le t-1)$. А поскольку ν в представлении $n = \nu + st$ единственно, то классы G_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, t-1$, не пересекаются.

Далее, пусть цепь находится в состоянии i из класса G_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, t-2)$, т. е. состояние i достижимо из состояния 1 за $st + \nu$ шагов. За один шаг из состояния i класса G_ν цепь перейдет в некоторое состояние j. Состояние j достижимо из 1 за $(st+\nu)+1 = st+(\nu+1)$ шагов, поэтому j принадлежит классу $G_{\nu+1}$. Таким образом, $\mathbb{P}$-цепь из класса G_ν за один шаг переходит в класс $G_{\nu+1}$, а из класса G_{t-1} за один шаг цепь переходит в класс G_0.

Пусть $i \in G_\nu$, т. е. i достижимо из состояния 1 за $\nu + s't$ шагов, и пусть сделано st шагов, при этом цепь оказалась в некотором состоянии j, которое достижимо из состояния 1 за $\nu + s't + st = \nu + (s' + s)t$ шагов. Поэтому $j \in G_\nu$. Так что за st шагов цепь переходит из класса G_ν в класс G_ν.

Убедимся, что в $\mathbb{Q}$-цепи каждый из классов G_ν является классом эквивалентности.

В самом деле, все состояния из класса G_ν сообщаются в $\mathbb{P}$-цепи, причем только за число шагов вида st, т. е. для данных i, j найдутся числа s_1 и s_2, что $P_{ij}(s_1 t) > 0$, $P_{ji}(s_2 t) > 0$ или, что то же $Q_{ij}(s_1) > 0$, $Q_{ji}(s_2) > 0$. Два последних неравенства обозначают, что каждые два состояния i, j из класса G_ν сообщаются в $\mathbb{Q}$-цепи.

Далее, в $\mathbb{Q}$-цепи состояния из класса G_ν сообщаются только с состояниями из G_ν. Действительно, пусть $i \in G_\nu$ и $i \to j$, т. е. существует такое s, что $Q_{ij}(s) > 0$, а, следовательно, и $P_{ij}(st) > 0$. Но из состояния $i \in G_\nu$ в $\mathbb{P}$-цепи за st шагов можно попасть только в состояние из класса G_ν, поэтому $j \in G_\nu$.

Убедимся, что класс эквивалентности G_ν в $\mathbb{Q}$-цепи непериодический. Предположим обратное. И пусть $j \in G_\nu$ и н. о. д. тех чисел u, для которых $Q_{jj}(u) > 0$ равен $d > 1$, т. е. числа u имеют вид $u = vd$. Переход из j в j в $\mathbb{P}$-цепи возможен только за число шагов вида ut, при этом
$$0 < Q_{jj}(u) = Q_{jj}(vd) = P_{jj}((vd)t) = P_{jj}(v(dt)).$$

Отсюда следует, что период состояния j в $\mathbb{P}$-цепи не менее dt, причем $dt > t$. Но период $\mathbb{P}$-цепи равен t. Это противоречие и доказывает, что $\mathbb{Q}$-цепь является непериодической.

Осталось проверить, что если $\mathbb{P}$-цепь возвратна, то каждый из классов G_ν в $\mathbb{Q}$-цепи возвратен. Пусть $i \in G_\nu$. Состояние i возвратно в $\mathbb{P}$-цепи, что равносильно расходимости ряда $\sum\limits_n P_{ii}(n)$. Но в $\mathbb{P}$-цепи из состояния i класса G_ν в состояние i можно вернуться только за st шагов, поэтому

$$\sum_n P_{ii}(n) = \sum_s P_{ii}(st) = \sum_s Q_{ii}(s)$$

(воспользовались (1.3.15)). Так что ряд $\sum\limits_s Q_{ii}(s)$ является расходящимся и, следовательно, i — возвратное состояние в $\mathbb{Q}$-цепи.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е Если в периодической с периодом t марковской цепи состояние i достижимо из $j \in G_f$ за n шагов, то

$$n = \nu + st,\ 0 \le \nu \le t-1,$$

при этом за первые ν шагов цепь, последовательно переходя из класса в класс, перейдет в класс $G_{f+\nu}$, а затем за каждые последующие t шагов будет переходить из класса $G_{f+\nu}$ в класс $G_{f+\nu}$, пока не окажется в состоянии i.

П р и м е р 1.3.4 ($\mathbb{Q}$-цепь для случайного блуждания). *Рассмотрим одномерное случайное блуждание по целочисленной решетке с вероятностью p перехода на единицу вправо и с вероятностью q перехода на единицу влево ($p+q=1$, $0<p<1$), см. также пример* 1.1.1. *$\mathbb{P}$-цепь неприводима и имеет период* 2. *А потому матрица переходных вероятностей $\mathbb{Q}$-цепи*

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{P})^2.$$

Фазовое пространство $\mathbb{Z}$ представимо в виде объединение двух непересекающихся классов G_0 и G_1, а именно

$$G_0 = \{\ldots, -2n, \ldots, -2, 0, 2, \ldots, 2n, \ldots\},$$

$$G_1 = \{\ldots, -(2n+1), \ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots, 2n+1, \ldots\}.$$

При этом мы за один шаг в $\mathbb{P}$-цепи переходим из класса G_0 в класс G_1, а из G_1 в G_0. В $\mathbb{Q}$-цепи G_0 и G_1 являются непериодическими классами эквивалентности.

Пример 1.3.5. *Марковская цепь с фазовым пространством* $\{1, 2, 3, 4\}$ *задана матрицей одношаговых переходных вероятностей*

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Классифицировать состояния марковской цепи. Убедиться, что цепь периодична. Пусть t *— период цепи, представить фазовое пространство в виде:*

$$G = G_0 \cup G_1 \cup \ldots \cup G_{t-1}.$$

В $\mathbb{Q}$*-цепи* ($\mathbb{Q} = \mathbb{P}(t)$) *найти матрицу переходных вероятностей для классов эквивалентности* $G_0, G_1, \ldots, G_{t-1}$*. Классифицировать состояния в классах эквивалентности* G_ν*,* $\nu = 0, 1, \ldots \ldots, t-1$*.*

Решение. Цепь неприводимая.

Из состояния 1 в состояние 1 можно попасть только за четное число шагов: $2, 4, 6, \ldots$ Поэтому состояние 1, а вместе с ним и цепь, периодична с периодом 2.

Фазовое пространство G (согласно теореме 1.3.9) представимо в виде

$$G = G_0 \cup G_1 = \{1, 2\} \cup \{3, 4\}.$$

Класс G_0 образуют состояния, в которые из состояния 1 можно попасть за $st + 0 = s \cdot 2 + 0$ шагов, такими состояниями являются $\{1, 2\}$. Класс G_1 образуют состояния, в которые из 1 можно попасть за $st + 1 = s \cdot 2 + 1$ шаг, такими состояниями являются $\{3, 4\}$.

Каждый из классов G_0 и G_1 в $\mathbb{Q} = \mathbb{P}(2)$-цепи является непериодическим возвратным классом эквивалентности.

Матрица переходных вероятностей $\mathbb{Q}$-цепи

$$\mathbb{Q} = \mathbb{P}(2) = (\mathbb{P})^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Матрица переходных вероятностей $\mathbb{Q}_0$ класса эквивалентности G_0:

$$\begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица переходных вероятностей $\mathbb{Q}_1$ класса эквивалентности G_1:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

1.4 Примеры и задачи

Примеры

Пример 1.4.1. *Матрица переходных вероятностей марковской цепи с фазовым пространством $X = \{1, 2, 3\}$ имеет вид*

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \end{bmatrix}.$$

Распределение цепи (по состояниям) в момент $t = 0$, другими словами, распределение случайной величины ξ_0, имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Найти:

1° *распределение цепи в момент $t = 2$;*

2° *вероятность того, что в моменты $t = 0$, 1, 2, 3 цепь будет находиться соответственно в состояниях* 1, 3, 3, 2, *т. е. найти $P\{\xi_0 = 1,\ \xi_1 = 3,\ \xi_2 = 3,\ \xi_3 = 2\}$.*

Решение.

1° Воспользуемся равенством (1.1.8) при $n = 2$, $X = \{1, 2, 3\}$:

$$P\{\xi_2 = j\} = \sum_{i=1}^{3} p_i P_{ij}(2),\ \ j = 1, 2, 3.$$

2° В силу теоремы 1.1.2 (см. (1.1.7)) искомая вероятность выражается через начальное распределение цепи и одношаговые переходные вероятности:

$$P\{\xi_0 = 1,\ \xi_1 = 3,\ \xi_2 = 3,\ \xi_3 = 2\} =$$
$$= P\{\xi_0 = 1\} P_{13} P_{33} P_{32} = 0,0336.$$

Пример 1.4.2. *Марковская цепь с фазовым пространством $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ задается матрицей одношаговых переходных вероятностей*

$$\mathbb{P} = [P_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Классифицировать состояния цепи.

Решение. Состояния 1 и 2 — несущественные, так как из 1 и из 2 можно с ненулевой вероятностью попасть в 5, но вернуться из состояния 5 невозможно (цепь приводима).

Состояния 3 и 4 — существенные, 5 — существенное.

Состояния 3 и 4 образуют класс эквивалентности (конечный), поэтому состояния 3 и 4 ненулевые и возвратные (см. теорему 1.3.5).

Состояние 5 образует класс эквивалентности, 5 ненулевое, возвратное состояние.

Состояния 3,4,5 — непериодические.

Пример 1.4.3. *Симметричную игральную кость подбрасывают независимым образом неограниченное число раз. Пусть ξ_k — число выпавших очков при k-м подбрасывании кости, $k = 1, 2, \ldots$ Рассмотрим последовательность случайных величин*

$$\eta_n = \max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\},\ n = 1, 2, \ldots$$

Показать, что последовательность $\{\eta_n\}$ образует марковскую цепь, найти ее матрицу переходных вероятностей, классифицировать состояния цепи.

Решение. Заметив, что

$$\eta_{n+1} = \max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}\} = \max\{\eta_n, \xi_{n+1}\},$$

получим

$$P\{\eta_{n+1} = j | \eta_n = i, \eta_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \eta_1 = i_1\} =$$

$$= \frac{P\{\eta_{n+1} = j, \eta_n = i, \eta_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \eta_1 = i_1\}}{P\{\eta_n = i, \eta_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \eta_1 = i_1\}} =$$

$$= \frac{P\{\max\{\xi_{n+1}, \eta_n\} = j, \eta_n = i, \eta_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \eta_1 = i_1\}}{P\{\eta_n = i, \eta_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \eta_1 = i_1\}} =$$

$$= \frac{P\{\max\{\xi_{n+1}, i\} = j, \eta_n = i, \eta_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \eta_1 = i_1\}}{P\{\eta_n = i, \eta_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \eta_1 = i_1\}} =$$

$$= \frac{P\{\max\{\xi_{n+1}, i\} = j\} P\{\eta_n = i, \eta_{n-1} = i_{n-1} \ldots, \eta_1 = i_1\}}{P\{\eta_n = i, \eta_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \eta_1 = i_1\}} =$$

$$= P\{\max\{\xi_{n+1}, i\} = j\}.$$

Воспользовались независимостью событий

$$\{\max\{\xi_{n+1}, i\} = j\},\ \{\eta_n = i, \ldots, \eta_1 = i_1\}.$$

Аналогично получаем

$$P\{\eta_{n+1} = j | \eta_n = i\} = P\{\max\{\xi_{n+1}, i\} = j\}.$$

Откуда и следует, что для последовательности случайных величин $\{\eta_n\}$ имеет место марковское свойство и, следовательно, последовательность $\{\eta_n\}$ является марковской цепью, причем стационарной.

Матрица одношаговых переходных вероятностей цепи

$$P_{ij} = P\{\eta_{n+1} = j | \eta_n = i\} = P\{\max\{\xi_{n+1}, i\} = j\},\ i, j = 1, 2, \ldots 6,$$

подробнее

$$\mathbb{P} = [P_{ij}] = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 2/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 3/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Состояния $1, 2, \ldots, 5$ несущественные. Состояние 6 существенное, оно образует класс эквивалентности и является возвратным, непериодическим.

Пример 1.4.4. *Монету, вероятность выпадения герба которой равна p $(0 < p < 1)$, подбрасывают независимым образом неограниченное число раз. Пусть ξ_k — число выпавших гербов при k-м подбрасывании монеты, $k = 1, 2, \ldots$ Рассмотрим последовательность случайных величин*

$$\eta_{n+1} = (\eta_n + 1) I_{\{1\}}(\xi_{n+1}),\ \eta_0 = 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Показать, что последовательность $\{\eta_n\}$ образует марковскую цепь, найти ее матрицу переходных вероятностей, классифицировать состояния цепи.

Решение. В том, что последовательность образует марковскую цепь, убеждаемся аналогично тому, как это делалось в примере 1.4.3.

Элементы матрицы одношаговых переходных вероятностей цепи

$$P\{\eta_{n+1}=j|\eta_n=i\}=\frac{P\{\eta_{n+1}=j,\eta_n=i\}}{P\{\eta_n=i\}}=$$

$$=\frac{P\{(\eta_n+1)I_{\{1\}}(\xi_{n+1})=j,\eta_n=i\}}{P\{\eta_n=i\}}=$$

$$=\frac{P\{(i+1)I_{\{1\}}(\xi_{n+1})=j,\eta_n=i\}}{P\{\eta_n=i\}}=$$

$$=\frac{P\{(i+1)I_{\{1\}}(\xi_{n+1})=j\}P\{\eta_n=i\}}{P\{\eta_n=i\}}=$$

$$=P\{(i+1)I_{\{1\}}(\xi_{n+1})=j\},$$

или

$$P_{ij}=P\{(i+1)I_{\{1\}}(\xi_{n+1})=j\},\ i,j\in X.$$

Матрица переходных вероятностей цепи

$$\mathbb{P}=\begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & 0 & p & 0 & \dots \\ & & \vdots & & & \end{bmatrix}.$$

Цепь неприводима, непериодична.

Убедимся, что цепь возвратна. Для этого проверим, что состояния 0 возвратно (см. теорему солидарности). Достаточным условием возвратности состояния 0 является расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}P_{0,0}(n)$$

(см. терему 1.2.2).

Непосредственной проверкой последовательно получаем, что

$$P_{0,0}(1)=q,\ P_{0,0}(2)=q,\ P_{0,0}(3)=q,\dots,P_{0,0}(n)=q,\dots$$

— для того чтобы найти $P_{0,0}(n+1)$ достаточно знать только первый столбец матрицы $\mathbb{P}(n)$, поскольку

$$\mathbb{P}(n+1) = \mathbb{P}\mathbb{P}(n),\ n = 1, 2, \ldots,$$

а первый столбец матрицы $\mathbb{P}(n)$ имеет вид

$$(q \;\; q \;\; q \;\; q \quad \ldots)'.$$

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{0,0}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} q = \infty.$$

Другое доказательство возвратности состояния 0:

$$P\{\tau < \infty | \eta_0 = 0\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{\tau = n | \eta_0 = 0\}$$

$$= P(\text{Р}) + P(\text{ГР}) + P(\text{ГГР}) + \ldots =$$

$$= q + pq + p^2 q + \ldots = q(1 + p + p^2 + \ldots) = q\frac{1}{1-p} = 1$$

(буква Г обозначает выпадение герба, буква Р — выпадение решетки).

З а м е ч а н и е. Марковская цепь $\{\eta_n\}$ описывает длину серии успехов в последовательности независимых испытаний с вероятностью успеха p в одном испытании. Каждая новая серия начинается после неудачи.

П р и м е р 1.4.5 (случайное блуждание по двумерной решетке). *Рассмотрим симметричное случайное блуждание по двумерной целочисленной решетке: вероятности смещения на единицу вправо, влево, вверх, вниз равны по* $1/4$. *Исследовать на возвратность состояние* $O(0;0)$ *— начало координат.*

Р е ш е н и е. Возвращение из $O(0;0)$ в $O(0;0)$ обеспечивают траектории (пути), состоящие из i перемещений влево, i перемещений вправо, j перемещений вверх, j перемещений вниз (всего перемещений $2i + 2j = 2n$). Каждая такая траектория определяется словом длиной $2n$, составленным из i букв П (вправо), i букв Л (влево), j букв В (вверх), j букв Н (вниз).

Вероятность частице пройти из $O(0;0)$ в $O(0;0)$ по данной траектории длиной $2n$ равна $(1/4)^{2n}$, по траектории длиной $2n$, состоящей из i перемещений влево, i перемещений вправо, j перемещений вверх, j перемещений вниз равна

$$C_{2n}(i,i,j,j)\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} = \frac{(2n)!}{i!i!j!j!}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n},$$

коэффициент при $(1/4)^{2n}$ равен числу слов длиной $2n$, составленных из букв П, Л, В, Н соответственно в количестве i, i, j, j. А вероятность $P_{00}(2n)$ возвращения из $O(0;0)$ в $O(0;0)$ равна

$$P_{00}(2n) = \sum_{(i,i,j,j):2i+2j=2n} \frac{(2n)!}{i!i!j!j!}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \sum_{(i,i,j,j):i+j=n} \frac{(2n)!n!n!}{n!n!i!i!j!j!} =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \frac{(2n)!}{n!n!} \sum_{(i,i,j,j):i+j=n} \frac{n!n!}{i!i!j!j!} =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} C_{2n}^n \sum_{i=0}^{n} C_n^i C_n^i = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} C_{2n}^n C_{2n}^n,$$

воспользовались тождеством

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i C_n^i = C_{2n}^n.$$

Используя формулу Стирлинга (см. пример 1.3.3), получим

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} (C_{2n}^n)^2 \sim \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \left(\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}\right)^2 = \frac{1}{\pi n}.$$

Ряд с общим членом $1/(\pi n)$ расходится, поэтому состояние $O(0;0)$, а вместе с ним и марковская цепь возвратная.

Установим использованное в доказательстве тождество

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^k = C_{2n}^n.$$

Число кратчайших путей из точки $O(0;0)$ в точку $A(n;n)$ равно C_{2n}^n. Каждый такой путь проходит через одну и только одну из точек $A_k(k;n-k)$, $0 \le k \le n$ (точки A_k лежат на отрезке, соединяющем точки $(0;n)$ и $(n;0)$). Число путей из точки $O(0;0)$ в точку $A_k(k;n-k)$ равно $C_{k+(n-k)}^k = C_n^k$, поэтому число путей из точки $O(0;0)$ в точку $A(n;n)$, проходящих через $A_k(k;n-k)$ равно $C_n^k C_n^k$ (в силу правила умножения). Сложив количество путей, проходящих через каждую из точек $A_k(k;n-k)$, $k=0,1,\ldots,n$, получим общее количество путей из $O(0;0)$ в точку $A(n;n)$, т. е. $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k C_n^k$. Тем самым тождество доказано.

Замечание. Отметим, что в отличие от симметричного случайного блуждания по одномерной целочисленной решетке и по двумерной, симметричное случайное блуждание по трехмерной целочисленной решетке является невозвратным. На неформальном языке это означает, что человек, злоупотребляющий спиртным, случайно блуждая по городу с вероятностью 1 всегда вернется домой, а вот хлебнувший лишнего воробей, возвращаясь домой (все еще в трехмерном пространстве — не пешком) рискует домой не вернуться.

Задачи

Задача 1.1. Марковская цепь с фазовым пространством $X = \{1,2,3\}$ описывается матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

Найти вероятность того, что:

1° цепь, стартовав из состояния 2, через два шага окажется в состоянии 1;

2° цепь, стартовав из состояния 3, через три шага вернется в состояние 3.

Найти распределение цепи через три шага после старта (в момент $t=3$), если начальным распределением цепи (распределением в момент $t=0$) является

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Ответы:

1° $P\{\xi_2 = 1 \,|\, \xi_0 = 2\} = P_{21}(2) = 2/9;$

2° $P\{\xi_3 = 3 \,|\, \xi_0 = 3\} = P_{33}(3) = 12/27$.

Распределение цепи через 3 шага после старта:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 20/81 & 19/81 & 42/81 \end{pmatrix}$$

Задача 1.2. Матрица одношаговых переходных вероятностей марковской цепи имеет вид

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Распределение цепи в момент $t = 0$ (распределение случайной величины ξ_0) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Найти:

1° распределение цепи в момент $t = 2$;

2° вероятность того, что в моменты $t = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ цепь будет находиться соответственно в состояниях 2, 3, 1, 2;

3° вероятность того, что в моменты $t = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ цепь будет находиться соответственно в состояниях 3, 2, 1, 1, 3.

Ответы:

1° Распределение цепи в момент $t = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0{,}351 & 0{,}491 & 0{,}158 \end{pmatrix}$$

2° 0,016; 3° 0,0002.

Задача 1.3 (существенные и несущественные состояния). 1° Могут ли все состояния марковской цепи быть существенными? у конечной марковской цепи? у бесконечной? (привести примеры).

Ответ. У случайного блуждания по целочисленной решетке (см. 1.3.3) все состояния существенные.

У конечной неприводимой марковской цепи все состояния существенные.

2° Могут ли все состояния марковской цепи быть несущественными? (привести примеры).

Ответ: в бесконечной марковской цепи все состояния могут быть несущественными, в конечной — нет.

Примером марковской цепи, все состояния которой несущественные, может быть, например, марковская цепь с матрицей переходных вероятностей

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2^2 & 1/2^3 & 1/2^4 & 1/2^5 & \dots \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2^2 & 1/2^3 & 1/2^4 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2^2 & 1/2^3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

3° Могут ли в марковской цепи быть как существенные, так и несущественные состояния? (привести примеры).

Ответ: да, например, в марковской цепи с матрицей переходных вероятностей

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

4° Могут ли несущественные состояния марковской цепи быть сообщающимися? (привести пример).

Ответ: да, см. пример 1.3.2, состояния $1, 2, \dots, n-1$ несущественные сообщающиеся.

5° Могут ли несущественные и существенные состояния марковской цепи быть сообщающимися?

Ответ. Нет, не могут. Пусть i — несущественное состояние, тогда найдется k такое, что $i \to k$, но i не достижимо из k. Пусть j — существенное состояние и $j \leftrightarrow i$, тогда $j \to i \to k$. Но j — существенное состояние, поэтому $k \to j$, а, следовательно, и $k \to j \to i$, т. е. i достижимо из k — противоречие.

6° Могут ли существенные состояния марковской цепи быть несообщающимися? (привести примеры).

Ответ: да, если марковская цепь содержит больше одного класса эквивалентности, см. пример 1.3.2 (с. 37), состояния 0 и n существенные, но несообщающиеся.

7° Каждая марковская цепь имеет хотя бы один класс эквивалентности. Справедливо ли это утверждение?

Ответ: да для конечной марковской цепи, для бесконечной — нет (см. 2° в задаче 1.3).

Задача 1.4 (нулевые, ненулевые состояния). 1° Могут ли все состояния неприводимой марковской цепи быть нулевыми? (привести примеры).

Ответ: Да — в бесконечной марковской цепи, см. пример 1.3.3 (с. 37) и пример 1.4.5 (с. 56). Нет — в конечной марковской цепи, см. теорему 1.3.5.

2° Могут ли в конечной марковской цепи быть нулевые состояния? (привести примеры).

Ответ: да.

3° Могут ли все состояния конечной марковской цепи быть нулевыми?

Ответ: нет (см. теорему 1.3.5).

4° Могут ли в конечной марковской цепи все состояния быть ненулевыми? Если да, то что необходимо потребовать от такой цепи?

Ответ: да, цепь не должна иметь несущественных состояний.

Задача 1.5 (нулевые и возвратные состояния). Может ли неприводимая нулевая марковская цепь быть

1° возвратной;

2° невозвратной?

Решение. Заметим, что в конечной неприводимой марковской цепи все состояния ненулевые, поэтому неприводимую нулевую марковскую цепь надо искать среди бесконечных цепей.

Случайное блуждание по целочисленной решетке является примером неприводимой нулевой марковской цепи, поскольку

$$P_{00}(2n) \sim \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

При этом цепь может быть как возвратной (при $p = q = 1/2$), так и невозвратной (при $p \neq q$).

3° Может ли неприводимая марковская цепь, сходясь по вероятности к ∞, с вероятностью 1 возвращаться в каждое свое состояние бесконечно много раз? Если да — привести примеры.

Ответ: да, например, случайное блуждание по целочисленной решетке, когда $p = q = 1/2$ — с одной стороны, случайное блуждание, как нулевая марковская цепь, сходится по вероятности к бесконечности, а с другой стороны, при $p = q = 1/2$ оно возвратно.

4° Доказать, что несущественное состояние является невозвратным.

5° Доказать, что несущественное состояние является нулевым.

Задача 1.6. Доказать, что неприводимая конечная марковская цепь возвратная.

Указание. Достаточно доказать, что такая цепь ненулевая.

Задача 1.7. 1° Доказать, что в невозвратной неприводимой марковской цепи с фазовым пространством

$$X = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

для любого K

$$P\{|\xi_n| > K\} \to 1 \text{ при } n \to \infty.$$

Другими словами, неприводимая невозвратная марковская цепь с фазовым пространством $X = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ при $n \to \infty$ "уходит в бесконечность" (по вероятности).

Указание. Невозвратная марковская цепь является нулевой.

Задача 1.8. Конечная неприводимая марковская цепь является ненулевой, а может ли неприводимая бесконечная марковская цепь быть ненулевой? (если да, то привести примеры).

Решение. Марковская цепь с фазовым пространством $X = \{1, 2, \dots\}$ и матрицей переходных вероятностей

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2^2 & 1/2^3 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

является неприводимой ненулевой.

У матрицы $\mathbb{P}(2)$ первый столбец имеет вид $(1\,0\,0\,\dots)'$, а, следовательно, такой же вид имеет и столбец у матрицы $\mathbb{P}(2n)$, $n = 1, 2, \dots$. Так что $P_{11}(2n) = 1$, $n = 1, 2, \dots$, поэтому цепь ненулевая.

Задача 1.9. Привести пример неприводимой возвратной марковской цепи, которая была бы нулевой. Какое может быть число состояний этой цепи: 1) только конечное, 2) только бесконечное, 3) может быть как конечным, так и бесконечным?

Ответ: случайное блуждание по одномерной целочисленной решетке при $p = q = 1/2$ является возвратным. При этом цепь нулевая, так как

$$P_{00}(2n) \sim \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \to 0$$

при $n \to \infty$ (см. (1.3.5)).

Неприводимая возвратная нулевая цепь может быть только бесконечной.

Задача 1.10. Доказать, что

$$P_{ij}(n) = \sum_{k=0}^{n} f_{ij}(k) P_{jj}(n-k), \; n = 0, 1, \dots$$

Воспользовавшись последним равенством, установить, что

$$\tilde{P}_{ij}(s) = \tilde{F}_{ij}(s)\tilde{P}_{jj}(s)$$

(см. также (1.3.9), (1.3.10)).

Указание. См. в теореме 1.2.2 доказательство равенства

$$P_{ii}(n) = \sum_{k=0}^{n} f_{ii}(k)P_{ii}(n-k).$$

Задача 1.11. Симметричную игральную кость подбрасывают независимым образом неограниченное число раз. Пусть ξ_k — число очков, выпавших при k-м подбрасывании кости, $k = 1, 2, \ldots$ Рассмотрим последовательности случайных величин

1) $\zeta_n = \min\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\},\ n = 1, 2, \ldots;$

2) $\eta_{n+1} = \min\{\eta_n + 1, \xi_n\},\ \eta_1 = \xi_1,\ n = 1, 2, \ldots;$

3) $\theta_{n+1} = \min\{\theta_n + 2, \xi_n\},\ \theta_1 = \xi_1,\ n = 1, 2, \ldots$

4) $\tau_{n+1} = \max\{\tau_n, \xi_n\}$, $\tau_1 = \xi_1$, $n = 1, 2, \ldots$;

5) $\varphi_{n+1} = \max\{(\varphi_n - 2)^+, \xi_n\}$, $\varphi_1 = \xi_1$, $n = 1, 2, \ldots,$
где $x^+ = \max\{0, x\}$ — положительная часть числа x;

6) $\psi_{n+1} = \max\{(\psi_n - 1), \xi_n\}$, $\psi_1 = \xi_1,\ n = 1, 2, \ldots$

Показать, что перечисленные последовательности образуют марковские цепи, найти их матрицы переходных вероятностей, классифицировать состояния этих цепей.

Ответ. В том, что последовательности образуют марковские цепи, убеждаемся аналогично тому, как мы это делали в примере 1.4.3.

1) Матрица одношаговых переходных вероятностей цепи $\{\zeta_n\}$:

$$\mathbb{P} = [P_{ij}] = [P\{\min\{i, \xi_n\} = j\}],\ i, j = 1, 2, \ldots 6,$$

подробнее

$$\mathbb{P} = [P_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 5/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 4/6 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 3/6 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 2/6 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}.$$

Состояния $1, 2, \ldots, 6$ не сообщаются, состояния $2, 3, \ldots, 6$ несущественные. Состояние 1 образует возвратный непериодический класс эквивалентности.

2) Матрица одношаговых переходных вероятностей цепи $\{\eta_n\}$:

$$\mathbb{P} = [P_{ij}] = [P\{\min\{i+1, \xi_n\} = j\}],\ i, j = 1, 2, \ldots 6,$$

подробнее

$$\mathbb{P} = [P_{ij}] = \begin{bmatrix} 1/6 & 5/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 4/6 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 3/6 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 2/6 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}.$$

Цепь $\{\eta_n\}$ неприводимая, возвратная, непериодическая.

3) Матрица одношаговых переходных вероятностей цепи $\{\theta_n\}$:

$$\mathbb{P} = [P_{ij}] = [P\{\min\{i+2, \xi_n\} = j\}],\ i, j = 1, 2, \ldots 6.$$

$$\mathbb{P} = [P_{ij}] = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 4/6 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 3/6 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 2/6 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}.$$

Цепь $\{\theta_n\}$ неприводимая, возвратная, непериодическая.

4) Матрица переходных вероятностей цепи $\{\tau_n\}$

$$\mathbb{P} = \{P_{ij}\} = [P\{\max\{i, \xi_n\} = j\}],\ i, j = 1, 2, \ldots, 6,$$

подробнее

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 2/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 3/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Состояния $1, 2, \ldots, 5$ — несущественные, состояние 1 образует класс эквивалентности.

5) Матрица переходных вероятностей цепи $\{\varphi_n\}$

$$\mathbb{P} = \{P_{ij}\} = \left[P\{\max\{(i-2)^+, \xi_n\} = j\}\right],\ i, j = 1, 2, \ldots, 6,$$

подробнее

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 2/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 3/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}.$$

Цепь неприводимая, возвратная, непериодическая.

6) Матрица переходных вероятностей цепи $\{\psi_n\}$

$$\mathbb{P} = \{P_{ij}\} = \left[P\{\max\{(i-1)^+, \xi_n\} = j\}\right], \ i, j = 1, 2, \ldots 6,$$

подробнее

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 2/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 3/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6 \end{bmatrix}.$$

Цепь неприводимая, возвратная, непериодическая.

Задача 1.12. Симметричную игральную кость подбрасывают независимым образом неограниченное число раз. Пусть ξ_k — число выпавших очков при k-м подбрасывании кости, $k = 1, 2, \ldots$ Рассмотрим последовательности случайных величин

1) $\eta_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, $n = 1, 2, \ldots$;

2) $\zeta_{n+1} = (\zeta_n - 1)^+ + \xi_n$, $\zeta_1 = \xi_1$, $n = 1, 2, \ldots$;

3) $\theta_{n+1} = (\theta_n - 2)^+ + \xi_n$, $\theta_1 = \xi_1$, $n = 1, 2, \ldots$;

Показать, что последовательности $\{\eta_n\}$, $\{\zeta_n\}$, $\{\theta_n\}$ образуют марковские цепи. Найти матрицы переходных вероятностей, классифицировать состояния цепей.

О т в е т. В том, что $\{\eta_n\}$, $\{\zeta_n\}$, $\{\theta_n\}$ образуют марковские цепи, убеждаемся аналогично тому, как мы это делали в примере 1.4.3.

1) Матрица переходных вероятностей цепи $\{\eta_n\}$:

$$\mathbb{P} = [P_{ij}] = [P\{i + \xi_n = j\}], \ i, j = 1, 2, \ldots,$$

подробнее

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & \ldots \\ & & & & \vdots & & & & & \end{bmatrix}.$$

Все состояния марковской цепи $\{\eta_n\}$ несущественные.

2) Матрица переходных вероятностей цепи $\{\zeta_n\}$:

$$\mathbb{P} = [P_{ij}] = \left[P\{(i-1)^+ + \xi_n = j\}\right], \ i,j = 1,2,\dots,$$

подробнее

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & \dots \\ & & & & \vdots & & & & & \end{bmatrix}.$$

Все состояния марковской цепи несущественные.

3) Матрица переходных вероятностей цепи $\{\theta_n\}$:

$$\mathbb{P} = [P_{ij}] = \left[P\{(i-2)^+ + \xi_n = j\}\right], \ i,j = 1,2,\dots,$$

подробнее

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & \dots \\ & & & & \vdots & & & & & \end{bmatrix}.$$

Цепь неприводимая, непериодическая.

Задача 1.13. Монету, вероятность выпадения герба которой равна p $(0 < p < 1)$, подбрасывают независимым образом неограниченное число раз. Пусть ξ_k — число выпавших гербов при k-м подбрасывании монеты, $k = 1, 2, \dots$ Рассмотрим последовательности случайных величин

1) $\eta_{n+1} = \max\{\eta_n, \xi_n\}, \ \eta_1 = \xi_1, \ n = 1, 2, \dots;$

2) $\zeta_{n+1} = \max\{(\zeta_n - 1)^+, \xi_n\}, \ \zeta_1 = \xi_1, \ n = 1, 2, \dots;$

3) $\theta_{n+1} = \min\{\theta_n, \xi_n\}, \ \theta_1 = \xi_1, \ n = 1, 2, \dots;$

4) $\varphi_{n+1} = \min\{\varphi_n + 1, \xi_n\}, \ \varphi_1 = \xi_1, \ n = 1, 2, \dots$

5) $\psi_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k, \ n = 1, 2, \dots$

Показать, что последовательности $\{\eta_n\}$, $\{\zeta_n\}$, $\{\theta_n\}$, $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ образуют марковские цепи, найти их матрицы переходных вероятностей, классифицировать состояния.

Ответ. В том, что $\{\eta_n\}$, $\{\zeta_n\}$, $\{\theta_n\}$, $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ образуют марковские цепи, убеждаемся аналогично тому, как это делалось в примере 1.4.3.

1) Матрица переходных вероятностей цепи $\{\eta_n\}$:

$$\mathbb{P} = \{P_{ij}\} = [P\{\max\{i, \xi_n\} = j\}]\,,\ i, j = 0, 1,$$

подробнее

$$\begin{bmatrix} 1-p & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2) Матрица переходных вероятностей цепи $\{\zeta_n\}$:

$$\mathbb{P} = \{P_{ij}\} = \left[P\{\max\{(i-1)^+, \xi_n\} = j\}\right],\ i, j = 0, 1,$$

подробнее

$$\begin{bmatrix} 1-p & p \\ 1-p & p \end{bmatrix}.$$

3) Матрица переходных вероятностей цепи $\{\theta_n\}$:

$$\mathbb{P} = \{P_{ij}\} = [P\{\min\{i, \xi_n\} = j\}]\,,\ i, j = 0, 1,$$

подробнее

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-p & p \end{bmatrix}.$$

4) Матрица переходных вероятностей цепи $\{\varphi_n\}$:

$$\mathbb{P} = \{P_{ij}\} = [P\{\min\{i+1, \xi_n\} = j\}]\,,\ i, j = 0, 1,$$

подробнее

$$\begin{bmatrix} 1-p & p \\ 1-p & p \end{bmatrix}.$$

5) Матрица переходных вероятностей цепи $\{\psi_n\}$

$$\mathbb{P} = \{P_{ij}\} = [P\{i + \xi_n = j\}]\,,\ i, j = 1, 2, \ldots,$$

подробнее

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1-p & p & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1-p & p & 0 & \ldots \\ & & \vdots & & & \end{bmatrix}.$$

Все состояния марковской цепи $\{\psi_n\}$ несущественные.

Задача 1.14. Марковская цепь с фазовым пространством $\{1, 2, 3, 4\}$ задана матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Классифицировать состояния марковской цепи. Убедиться, что цепь периодична. Пусть t — период цепи. Представить фазовое пространство в виде:

$$G = G_0 \cup G_1 \cup \ldots \cup G_{t-1}.$$

В $\mathbb{Q}$-цепи ($\mathbb{Q} = \mathbb{P}(t)$) найти матрицу переходных вероятностей для каждого из классов эквивалентности $G_0, G_1, \ldots, G_{t-1}$. Классифицировать состояния в классах эквивалентности G_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, t-1$.

Задача 1.15. Марковская цепь с фазовым пространством $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ задана матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Классифицировать состояния марковской цепи. Убедиться, что цепь периодична. Пусть t — период цепи. Представить фазовое пространство в виде:

$$G = G_0 \cup G_1 \cup \ldots \cup G_{t-1}.$$

В $\mathbb{Q}$-цепи ($\mathbb{Q} = \mathbb{P}(t)$) найти матрицу переходных вероятностей для каждого из классов эквивалентности $G_0, G_1, \ldots, G_{t-1}$. Классифицировать состояния в классах эквивалентности G_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, t-1$.

Задача 1.16. Монету, вероятность выпадения герба которой p, подбрасывают независимым образом неограниченное число раз. Пусть ξ_n — разность между числом выпавших гербов и решеток после n-го подбрасывания.

Убедиться, что последовательность ξ_n образует марковскую цепь, найти ее матрицу переходных вероятностей.

Указание. Пусть $\xi_n = i$ — разность между числом выпавших гербов и решеток. Если в $(n+1)$-м подбрасывании выпал герб, то число выпавших гербов увеличивается на 1, число решеток остается тем же, и, следовательно, $\xi_{n+1} = i+1$, а

$$P\{\xi_{n+1} = i+1 | \xi_n = i\} = p$$

Если выпала решетка, то

$$P\{\xi_{n+1} = i-1 | \xi_n = i\} = 1-p.$$

Задача 1.17. В двух урнах находится $2N$ шаров (по N в каждой), среди них N белых и N черных. Из каждой урны наудачу выбирают по шару и перекладывают из одной урны в другую. Пусть ξ_n — число белых шаров в первой урне после n-го перекладывания (в момент n).

Убедиться, что последовательность ξ_n образует марковскую цепь, найти ее матрицу переходных вероятностей.

Указание. Пусть $\xi_n = k$ $(1 \le k \le N-1)$. Значение $\xi_{n+1} = k+1$, если из первой урны выбран черный шар, а из второй — белый, вероятность этого события равна $(N-k)^2/N^2$. Значение $\xi_{n+1} = k-1$, если из первой урны выбран белый шар, а из второй — черный, вероятность этого события равна k^2/N^2. Значение $\xi_{n+1} = k$, если из первой и второй урны выбраны шары одного цвета, вероятность этого события равна $2k(N-k)/N^2$. Если $\xi_n = 0$, то $\xi_{n+1} = 1$; если $\xi_n = N$, то $\xi_{n+1} = N-1$. Для $0 < k < N$

$$P_{k,k+1} = (N-k)^2/N^2,\ P_{k,k-1} = k^2/N^2,\ P_{k,k} = 2k(N-k)/N^2,$$

$$P_{0,1} = 1,\ P_{N,N-1} = 1.$$

Для остальных пар i, j значения $P_{i,j} = 0$.

Очевидно, что состояние ξ_{n+1} системы — число белых шаров в первой урне после $(n+1)$-го перекладывания — определяется состоянием ξ_n системы в момент n и не зависит от того, сколько белых шаров было в первой урне до момента n. Поэтому последовательность $\{\xi_n\}$ образует марковскую цепь.

Задача 1.18. Организм в конце своей жизни производит случайное число ξ потомков. Распределение случайной величины ξ:

$$P\{\xi = k\} = a_k,\ k = 0, 1, 2, \dots \tag{1.4.1}$$

Каждый из потомков в конце своей жизни независимо от других потомков производит потомство, численность которого имеет распределение (1.4.1). (Мы будем предполагать, что продолжительность жизни одинакова для всех организмов.)

Обозначим через ζ_n численность популяции в n-м поколении, $n = 1, 2, \ldots$

Убедиться, что последовательность $\{\zeta_n\}$ образует марковскую цепь, найти ее матрицу переходных вероятностей (последовательность $\{\zeta_n\}$ известна под названием ветвящегося процесса).

Указание. Пусть численность популяции в n-м поколении равна i, т. е. $\zeta_n = i$. Каждый из i членов популяции производит ξ потомков, в результате чего численность ζ_{n+1} популяции в $(n+1)$-м поколении становится равной $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_i$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$P_{i,j} = P\{\zeta_{n+1} = j | \zeta_n = i\} = P\{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_i = j\}.$$

Эта вероятность равна значению в точке j распределения суммы

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_i$$

независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i$, распределение каждой из которых определяется равенством (1.4.1).

Задача 1.19. Доказать, что равенство (1.1.9) при каждом фиксированном n задает вероятностное распределение на множестве последовательностей $i_0, i_1, \ldots, i_n$ целых неотрицательных чисел.

Глава 2

Предельные теоремы для марковских цепей

2.1 Эргодическая теорема

Дискретное уравнение восстановления. Ключевым в анализе предельного поведения марковской цепи является следующий результат.

Теорема 2.1.1 (уравнение восстановления). *Пусть*

1) F — *вероятностное распределение, сосредоточенное на множестве целых неотрицательных чисел такое, что н.о.д. тех* k*, для которых*

$$F(\{k\}) = a_k > 0,\ k = 0, 1, \ldots,$$

равен 1*;*

2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ — *сходящийся ряд с неотрицательными членами.*

Если уравнение восстановления

$$u_n - \sum_{k=0}^{n} a_k u_{n-k} = b_n,\ n = 0, 1, \ldots, \tag{2.1.1}$$

имеет ограниченное решение $u = (u_0, u_1, \ldots)$*:*

$$\sup_n |u_n| \le M,$$

то оно имеет и предел, причем

$$\lim_n u_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \Bigg/ \sum_{k=0}^{\infty} k a_k, \tag{2.1.2}$$

если $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k a_k < \infty$, *и*

$$\lim_n u_n = 0,$$

если $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k a_k = \infty$.

Доказательство. Мы докажем теорему в предположении, что $a_1 > 0$, но она имеет место и в приведенной выше формулировке.

В условиях теоремы решение уравнения восстановления неотрицательно. Действительно, из $a_1 > 0$ следует $0 < 1 - a_0$. Полагая в (2.1.1) последовательно $n = 0, 1, 2 \ldots$, получаем: при $n = 0$

$$u_0 - a_0 u_0 = b_0, \ u_0(1 - a_0) = b_0,$$

и так как $0 < 1 - a_0$, $b_0 \geq 0$, то $u_0 \geq 0$; при $n = 1$

$$u_1 - (a_0 u_1 + a_1 u_0) = b_1, \ u_1(1 - a_0) = b_1 + a_1 u_0,$$

и так как $b_1 \geq 0$, $a_1 \geq 0$, $u_0 \geq 0$, то и $u_1 \geq 0$. И так далее (по индукции) получаем, что $u_n \geq 0$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$

Для доказательства теоремы установим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \Bigg/ \sum_{k=0}^{\infty} k a_k \leq \underline{\lim}\, u_n \leq \overline{\lim}\, u_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k \Bigg/ \sum_{k=0}^{\infty} k a_k, \tag{2.1.3}$$

если $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k a_k < \infty$, и

$$0 \leq \underline{\lim}\, u_n \leq \overline{\lim}\, u_n \leq 0$$

если $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k a_k = \infty$.

Обозначим

$$\mu = \underline{\lim}\, u_n, \ \lambda = \overline{\lim}\, u_n.$$

Далее нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Если $\{u_{n_j}\}$ — *подпоследовательность последовательности* $\{u_n\}$*, для которой*

$$\lim_{n_j} u_{n_j} = \lambda = \overline{\lim}\, u_n,$$

то и

$$\lim_{n_j} u_{n_j - d} = \lambda \tag{2.1.4}$$

для каждого натурального d*.*

Заметим, что поскольку $\lambda = \overline{\lim}\, u_n$, то для данного $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого n_0 $(n > n_0)$

$$u_n \le \lambda + \varepsilon. \tag{2.1.5}$$

Сначала покажем, что

$$\lim_{n_j} u_{n_j - 1} = \lambda.$$

Предположим противное, т. е. u_{n_j-1} не сходится к λ. Тогда найдется $\lambda' < \lambda$ (найдется окрестность $(\lambda', +\infty)$ точки λ), что для бесконечного числа значений индекса n_j

$$u_{n_j-1} \le \lambda' < \lambda.$$

Для этих индексов оценим u_{n_j} сверху, воспользовавшись тем, что u_{n_j} удовлетворяют равенствам

$$u_{n_j} = \sum_{k=0}^{n_j} a_k u_{n_j-k} + b_{n_j}$$

(см. (2.1.1)) или

$$u_{n_j} = \sum_{k=0, k\ne 1}^{N} a_k u_{n_j-k} + a_1 u_{n_j-1} + \sum_{k=N+1}^{n_j} a_k u_{n_j-k} + b_{n_j}$$

(N выберем далее). Оценим каждое слагаемое в правой части последнего равенства.

Поскольку $u_{n_j-1} \leq \lambda'$, то

$$a_1 u_{n_j-1} \leq a_1 \lambda'.$$

При достаточно больших n_j значение

$$b_{n_j} \leq \varepsilon,$$

поскольку ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ сходится.

Из сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ и ограниченности последовательности $\{u_n\}$ следует, что найдется такое N, что

$$\sum_{k=N+1}^{n_j} a_k u_{n_j-k} \leq M \sum_{k=N+1}^{n_j} a_k \leq M \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k \leq \varepsilon,$$

зафиксируем это N.

И, наконец, в силу (2.1.5), при достаточно больших n_j $(n_j \geq n_0, n_j \geq N)$ с учетом того, что $k \leq N$, имеем

$$\sum_{k=0,\, k\neq 1}^{N} a_k u_{n_j-k} \leq (\lambda+\varepsilon) \sum_{k=0,\, k\neq 1}^{N} a_k \leq$$

$$\leq (\lambda+\varepsilon) \sum_{k=0,\, k\neq 1}^{\infty} a_k = (\lambda+\varepsilon)(1-a_1).$$

"Собирая" все оценки, получим

$$u_{n_j} \leq (\lambda+\varepsilon)(1-a_1)+a_1\lambda'+\varepsilon+\varepsilon = \lambda(1-a_1)+\varepsilon(1-a_1)+a_1\lambda'+2\varepsilon \leq$$

$$\leq \lambda - \lambda a_1 + \lambda' a_1 + 3\varepsilon = \lambda - a_1(\lambda-\lambda') + 3\varepsilon.$$

В частности, если

$$3\varepsilon = \frac{1}{2}\, a_1(\lambda-\lambda'),$$

то для бесконечного числа индексов n_j имеем

$$u_{n_j} \leq \lambda - \frac{1}{2} a_1(\lambda-\lambda'),$$

т. е. бесконечное число элементов последовательности $\{u_{n_j}\}$, сходящейся к λ, не принадлежит окрестности точки λ. Из полученного противоречия и следует, что если $u_{n_j} \to \lambda$, то и $u_{n_j - 1} \to \lambda$.

Повторяя те же рассуждения применительно к u_{n_j-1}, убеждаемся, что u_{n_j-2} сходится к λ и т. д.

Так что, *если последовательность $\{u_{n_j}\}$ сходится к λ, то и последовательность $\{u_{n_j-d}\}$ также сходится к λ для каждого целого $d > 0$.*

Аналогичное утверждение имеет место для $\mu = \underline{\lim}\, u_n$.

Если подпоследовательность $\{u_{n_j}\}$ последовательности $\{u_n\}$, сходится к μ:

$$\lim_{n_j} u_{n_j} = \mu = \underline{\lim}\, u_n,$$

то и

$$\lim_{n_j} u_{n_j-d} = \mu = \underline{\lim}\, u_n \qquad (2.1.6)$$

для каждого натурального d.

Далее нам понадобится запись уравнения восстановления

$$u_n - \sum_{k=0}^{n} a_k u_{n-k} = b_n,\ n = 0, 1, \ldots,$$

в терминах остатков:

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots,\ n = 0, 1, \ldots,$$

ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

Очевидно,

$$r_0 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = 1 - a_0.$$

$$a_n = r_{n-1} - r_n,\ n = 1, 2, \ldots,$$
$$a_0 = 1 - r_0.$$

При $n = 0$ из уравнения восстановления (см. (2.1.1)) имеем

$$u_0 - u_0 a_0 = b_0$$

или, в терминах остатков,

$$r_0 u_0 = b_0; \qquad (2.1.7)$$

при $n \geq 1$ из (2.1.1) имеем

$$u_n - (a_0 u_n + a_1 u_{n-1} + \ldots + a_{n-1} u_1 + a_n u_0) = b_n,$$

в терминах остатков —

$$u_n(1-a_0) - ((r_0 - r_1)u_{n-1} + (r_1 - r_2)u_{n-2} + \ldots + (r_{n-1} - r_n)u_0) = b_n$$

или

$$r_0 u_n + r_1 u_{n-1} + \ldots + r_n u_0 - (r_0 u_{n-1} + \ldots + r_{n-1} u_0) = b_n.$$

Обозначив

$$r_0 u_n + r_1 u_{n-1} + \ldots + r_n u_0 = A_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

перепишем уравнение восстановления так:

$$A_n - A_{n-1} = b_n,\ n = 1, 2, \ldots,$$

при $n = 0$

$$A_0 = b_0$$

(см. равенство (2.1.7)). И, наконец, так:

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} b_k,\ n = 0, 1, \ldots,$$

или, подробнее,

$$r_0 u_n + r_1 u_{n-1} + \ldots + r_n u_0 = \sum_{k=0}^{n} b_k,\ n = 0, 1, \ldots \tag{2.1.8}$$

(уравнение восстановления в терминах остатков).

На следующем этапе доказательства, используя запись уравнения восстановления в терминах остатков, предельным переходом по n получим, что

$$\underline{\lim}\, u_n = \mu = \lambda = \overline{\lim}\, u_n.$$

Пусть $\{n_j\}$ — последовательность индексов, для которых

$$\lim_{n_j} u_{n_j} = \lambda,$$

а, следовательно, и
$$\lim_{n_j} u_{n_j - d} = \lambda$$
для каждого d. Положив в (2.1.8) $n = n_j$, получим
$$r_0 u_{n_j} + r_1 u_{n_j - 1} + \ldots + r_N u_{n_j - N} + r_{N+1} u_{n_j - (N+1)} + \ldots + r_{n_j} u_0 = \sum_{k=0}^{n_j} b_k.$$
Отсюда
$$r_0 u_{n_j} + r_1 u_{n_j - 1} + \ldots + r_N \, u_{n_j - N} \leq \sum_{k=0}^{n_j} b_k.$$
Переходя к пределу при $n_j \to \infty$ в правой и левой частях последнего неравенства, имеем
$$\lambda (r_0 + r_1 + \ldots + r_N) \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k,$$
отсюда
$$\lambda \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k \Bigg/ \sum_{k=0}^{N} r_k. \tag{2.1.9}$$
Далее рассмотрим отдельно два случая:
$$\sum_{k=0}^{\infty} r_k = +\infty; \qquad \sum_{k=0}^{\infty} r_k < \infty$$
(заметим, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} r_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k a_k$).

Если $\sum\limits_{k=0}^{\infty} r_k = +\infty$, то переходя в неравенстве (2.1.9) к пределу при $N \to \infty$, получаем
$$\lambda \leq 0,$$
что с вместе с неравенствами $0 \leq \mu \leq \lambda \leq 0$ доказывает теорему.

Если $\sum\limits_{k=0}^{\infty} r_k < \infty$, то из (2.1.9) имеем

$$\lambda \le \sum_{k=0}^{\infty} b_k \Bigg/ \sum_{k=0}^{\infty} r_k.$$

Установим, что имеет место и неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \Bigg/ \sum_{k=0}^{\infty} r_k \le \mu.$$

Пусть n_j — последовательность индексов, для которых

$$\mu = \lim_{n_j} u_{n_j},$$

а, следовательно, и

$$\lim_{n_j} u_{n_j - d} = \mu$$

для каждого $d > 0$. Для этих значений индексов из (2.1.8) имеем

$$r_0 u_{n_j} + r_1 u_{n_j-1} + \ldots + r_N\, u_{n_j-N} +$$

$$+(r_{N+1}\, u_{n_j-(N+1)} + \ldots + r_{n_j} u_0) = \sum_{k=0}^{n_j} b_k.$$

Отсюда, учитывая что $\sup\limits_k u_k \le M$, получаем неравенство

$$r_0 u_{n_j} + r_1 u_{n_j-1} + \ldots + r_N\, u_{n_j-N} + M(r_{N+1} + \ldots + r_{n_j}) \ge \sum_{k=0}^{n_j} b_k\,.$$

Переходя к пределу при $n_j \to \infty$ в правой и левой частях этого неравенства, имеем

$$\mu(r_0 + r_1 + \ldots + r_N) + M \sum_{k=N+1}^{\infty} r_k \ge \sum_{k=0}^{\infty} b_k,$$

далее, переходя к пределу при $N \to \infty$ и учитывая, что

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} r_k = 0$$

(ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} r_k$ сходится), получаем

$$\mu \sum_{k=0}^{\infty} r_k \geq \sum_{k=0}^{\infty} b_k,$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \Big/ \sum_{k=0}^{\infty} r_k \leq \mu.$$

Что вместе с ранее полученным неравенством

$$\lambda \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k \Big/ \sum_{k=0}^{\infty} r_k$$

и доказывает теорему.

Эргодическая теорема для непериодических цепей. Напомним, что

$$P_{ii}(0) = 1,\ P_{ii}(n) = P\{\xi_n = i|\xi_0 = i\},\ n = 1, 2, \ldots,$$

$$f_{ii}(0) = 0,\ f_{ii}(1) = P\{\xi_1 = i|\xi_0 = i\} = P_{ii}(1),$$

$$f_{ii}(n) = P\{\xi_n = i, \xi_0 = i, \xi_\nu \neq i,\ \nu = 1, 2, \ldots, n-1|\xi_0 = i\},$$

$n = 2, 3, \ldots$,

$$P_{ii}(n) = \sum_{k=0}^{n} f_{ii}(k) P_{ii}(n-k),\ n = 1, 2, \ldots,$$

τ_i — момент первого возвращения в состояние i, его математическое ожидание

$$M\tau_i = \sum_{k=0}^{\infty} k f_{ii}(k).$$

Теорема 2.1.2 (эргодическая). *В неприводимой возвратной непериодической марковской цепи для любых состояний i, j существуют $\lim\limits_{n} P_{ii}(n)$, $\lim\limits_{n} P_{ji}(n)$ и*

$$\lim_{n} P_{ji}(n) = \lim_{n} P_{ii}(n),$$

причем, если $M\tau_i < \infty$, то

$$\lim_n P_{ii}(n) = \frac{1}{M\tau_i},$$

если $M\tau_i = \infty$, то

$$\lim_n P_{ii}(n) = 0.$$

Доказательство. Равенства

$$P_{ii}(0) = 1,\ P_{ii}(n) - \sum_{k=0}^{n} f_{ii}(k) P_{ii}(n-k) = 0,\ n = 1, 2, \ldots,$$

обозначают, что последовательность

$$u_n = P_{ii}(n),\ n = 0, 1 \ldots,$$

является ограниченным решением уравнения восстановления

$$u_n - \sum_{k=0}^{n} a_k u_{n-k} = b_n,\ n = 0, 1, \ldots,$$

у которого

$$a_k = f_{ii}(k),\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_0 = 1,\ b_n = 0,\ n = 1, 2, \ldots$$

При этом, во-первых, $a_k = f_{ii}(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ — вероятностное распределение на множестве $\{0, 1, 2, \ldots\}$ — поскольку цепь возвратна, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_{ii}(k) = 1,$$

и, во-вторых, цепь непериодична, т. е. наибольший общий делитель тех k, для которых $P_{ii}(k) > 0$ равен 1 (не нарушая общности будем считать, что $f_{ii}(1) = P_{ii}(1) > 0$). Поэтому согласно теореме 2.1.1 ограниченное решение $\{P_{ii}(n)\}$ уравнения восстановления имеет предел, причем

$$\lim_n P_{ii}(n) = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} k f_{ii}(k)} = \frac{1}{M\tau_i},$$

если $M\tau_i < \infty$, и
$$\lim_n P_{ii}(n) = 0,$$
если $M\tau_i = \infty$.

Установим ещё, что
$$\lim_n P_{ji}(n) = \lim_n P_{ii}(n).$$

Имеет место следующее легко проверяемое соотношение:
$$P_{ji}(n) = \sum_{k=0}^{n} f_{ji}(k)P_{ii}(n-k),\ n = 0, 1, 2, \dots,$$
которое в обозначениях $P_{ji}(n) = y_n$, $P_{ii}(n) = x_n$, $f_{ji}(k) = b_k$, перепишем так:
$$y_n = \sum_{k=0}^{n} b_k x_{n-k},\ n = 0, 1, 2, \dots,$$
причем, поскольку цепь возвратная, то
$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} f_{ji}(k) = f^*_{ji} = 1,$$
см. теорему 1.3.8.

Покажем, что если $x_n \to c$ при $n \to \infty$ ($|x_n| \le 1$ и $|c| \le 1$), то $y_n \to c$ при $n \to \infty$.

Действительно,
$$y_n - c = \sum_{k=0}^{n} b_k x_{n-k} - c = \sum_{n=0}^{n} b_k x_{n-k} - c\sum_{k=0}^{\infty} b_k =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} b_k(x_{n-k} - c) - c\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k =$$
$$= \sum_{k=0}^{N} b_k(x_{n-k} - c) + \sum_{k=N+1}^{n} b_k(x_{n-k} - c) - c\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k.$$

Отсюда

$$|y_n - c| \leq \sum_{k=0}^{N} b_k |x_{n-k} - c| + \sum_{k=N+1}^{n} b_k |x_{n-k} - c| + c \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k.$$

Будем оценивать правую часть, начиная со второй суммы.

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем N так, чтобы

$$\sum_{k=N+1}^{n} b_k |x_{n-k} - c| \leq 2 \sum_{k=N+1}^{n} b_k \leq 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} b_k \leq \varepsilon$$

и зафиксируем. Далее, поскольку последовательность $\{x_l\}$ сходится к c, то при достаточно больших n

$$\sum_{k=0}^{N} b_k |x_{n-k} - c| \leq \varepsilon.$$

Третья сумма как остаток сходящегося ряда меньше ε. Поэтому при достаточно больших n

$$|y_n - c| \leq 3\varepsilon.$$

Тем самым теорема доказана.

Следствие 1. *В ненулевой неприводимой непериодической марковской цепи для любых состояний i, j существуют $\lim_n P_{ii}(n)$, $\lim_n P_{ji}(n)$ и*

$$\lim_n P_{ji}(n) = \lim_n P_{ii}(n),$$

среднее время возвращения

$$M\tau_i = \sum_{k=0}^{\infty} k f_{ii}(k)$$

конечно и

$$\lim_n P_{ii}(n) = \frac{1}{M\tau_i}.$$

Доказательство. Так как цепь ненулевая, то она возвратна, и в силу эргодической теоремы существуют и равны $\lim_n P_{ii}(n)$, $\lim_n P_{ji}(n)$.

Далее, среднее время возвращения $M\tau_i$ в состояние i конечно — если бы $M\tau_i = \infty$, то в силу эргодической теоремы $\lim\limits_n P_{ii}(n) = 0$, но последовательность $P_{ii}(n)$ не стремится к нулю (цепь ненулевая). В силу эргодической теоремы

$$\lim_n P_{ii}(n) = \frac{1}{M\tau_i}.$$

З а м е ч а н и е. В силу теоремы 1.3.1 множество существенных состояний марковской цепи распадается на непересекающиеся классы сообщающихся между собой состояний (классы эквивалентности). Для тех из классов, которые являются возвратными непериодическими, имеет место эргодическая теорема.

Эргодическое распределение. Пусть C — возвратный непериодический класс. Вероятностное распределение $\{\pi_j\}$, заданное на классе C равенствами

$$\pi_j = \lim_n P_{jj}(n),\ \ j \in C,$$

называется *эргодическим.* Если при этом хотя бы для одного i значение $\pi_i > 0$, то класс C называется *возвратным ненулевым* (*эргодическим*), если хотя бы для одного k значение $\pi_k = 0$, то класс называется *возвратным нулевым* (*слабо эргодическим*).

Определение эргодического распределения, возвратного ненулевого и возвратного нулевого классов корректно. Из

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(n) = 1$$

имеем $\sum\limits_{j=0}^{N} P_{ij}(n) \leq 1$. Переходя в последнем неравенстве к пределу сначала по n, а затем по N, получим

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \leq 1,$$

т. е. $\{\pi_j\}$ является вероятностным распределением (собственным[1] или несобственным).

[1]Распределение $\{\pi_j\}$ называют *собственным* вероятностным распределением, если $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$ и *несобственным*, если $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \pi_j < 1$.

Далее, для любых $i, j \in C$

$$P_{jj}(n+s+m) \geq P_{ji}(n)P_{ii}(s)P_{ij}(m) \tag{2.1.10}$$

(см. следствие 3 из уравнения Колмогорова — Чепмена). В силу неприводимости класса C числа n и m можно выбрать так, что $P_{ji}(n) > 0$, $P_{ij}(m) > 0$. Переходя в неравенстве (2.1.10) к пределу при $s \to \infty$, получаем

$$\pi_j \geq P_{ji}(n)\pi_i P_{ij}(m).$$

Поэтому, если для некоторого i значение $\pi_i > 0$, то $\pi_j > 0$ и для каждого другого $j \in C$; если для некоторого j значение $\pi_j = 0$, то для всех $i \in C$ значение $\pi_i = 0$.

Заметим, что у нулевого класса эквивалентности C эргодическое распределение всегда существует, поскольку для каждого состояния j из нулевого класса C

$$\lim_n P_{jj}(n) = 0.$$

Теорема 2.1.3 (о предельном распределении марковской цепи). *Распределение неприводимой возвратной непериодической марковской цепи сходится к ее эргодическому распределению* $\{\pi_k\}$*:*

$$\lim_n P\{\xi_n = k\} = \pi_k,\ \ k = 0, 1, \ldots$$

Доказательство. Обозначим $P\{\xi_n = k\}$ через $Q_n(\{k\})$. В силу (1.1.8) $Q_n(\{k\})$ можно представить в виде

$$Q_n(\{k\}) = P\{\xi_n = k\} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i P_{ik}(n).$$

Отсюда

$$|Q_n(\{k\}) - \pi_k| = \left|\sum_{i=0}^{\infty} p_i P_{ik}(n) - \pi_k\right| = \left|\sum_{i=0}^{\infty} p_i P_{ik}(n) - \pi_k \sum_{i=0}^{\infty} p_i\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=0}^{\infty} p_i (P_{ik}(n) - \pi_k)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{N} p_i \, |P_{ik}(n) - \pi_k| + \sum_{i=N+1}^{\infty} p_i \, |P_{ik}(n) - \pi_k| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{N} p_i |P_{ik}(n) - \pi_k| + 2 \sum_{i=N+1}^{\infty} p_i.$$

Выберем N так, чтобы $2 \sum\limits_{i=N+1}^{\infty} p_i < \varepsilon$ и зафиксируем. Далее, поскольку $P_{ik}(n) \to \pi_k$ при $n \to \infty$, то при достаточно больших n

$$\sum_{i=0}^{N} p_i |P_{ik}(n) - \pi_k| < \varepsilon,$$

а, следовательно,

$$|Q_n(\{k\}) - \pi_k| \leq 3\varepsilon.$$

Тем самым теорема доказана.

Стационарное распределение марковской цепи. *Стационарным* распределением марковской цепи с матрицей переходных вероятностей $\mathbb{P} = [P_{ij}]$ называется вероятностное распределение $\{v_k\}$ (собственное или несобственное), для которого при каждом n

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i P_{ij}(n) = v_j, \;\; j = 0, 1, \ldots, \tag{2.1.11}$$

или, в матричном виде,

$$\mathbb{P}'(n) v = v,$$

где $v = (v_0, v_1, v_2, \ldots)'$.

Пусть $\{v_i\}$ — начальное распределение марковской цепи $\{\xi_n\}$:

$$P\{\xi_0 = i\} = v_i, \;\; i = 0, 1, \ldots,$$

тогда для любого n

$$\sum_{i} v_i P_{ik}(n) = P\{\xi_n = k\}, \;\; k = 0, 1, \ldots$$

Если начальное распределение $\{v_i\}$ цепи является ее стационарным распределением, то из последнего равенства и определения стационарного распределения цепи следует

$$P\{\xi_n = k\} = v_k,\ k = 0, 1, \dots,$$

т. е. при каждом n распределение $P\{\xi_n = k\},\ k = 0, 1, \dots,$ цепи совпадает с ее стационарным распределением $\{v_k\}$ — с течением времени распределение цепи не меняется.

Далее мы будем пользоваться следующим утверждением.

Для того, чтобы вероятностное распределение $\{v_k\}$ *марковской цепи с матрицей переходных вероятностей* $\mathbb{P} = [P_{ij}]$ *было стационарным, достаточно, чтобы*

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i P_{ik} = v_k,\ k = 0, 1, \dots, \tag{2.1.12}$$

или, в матричном виде,

$$\mathbb{P}' v = v.$$

В самом деле, умножив правую и левую часть равенства

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i P_{ik} = v_k,\ k = 0, 1, \dots,$$

на P_{kj} и просуммировав по всем k, получим

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik} P_{kj} = \sum_{k=0}^{\infty} v_k P_{kj},$$

или

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i P_{ij}(2) = v_j,\ j = 0, 1, \dots$$

Повторив эту операцию n раз, получим (2.1.11).

Распределение $\{v_k\}$, для которого имеет место (2.1.12), также называют стационарным.

Т е о р е м а 2.1.4 (о стационарном и эргодическом распределениях). *Эргодическое распределение неприводимой ненулевой непериодической цепи является ее собственным стационарным распределением, и наоборот: собственное стационарное распределение неприводимой возвратной непериодической цепи является ее эргодическим распределением.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что ненулевая цепь заведомо возвратная, поэтому у неё существует эргодическое распределение.

Сначала покажем, что любое эргодическое распределение цепи $\{\pi_j\}$ ($\pi_j = \lim\limits_n P_{jj}(n)$) является ее стационарным распределением, т. е.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij} = \pi_j, \ j = 0, 1, \ldots$$

Из уравнения Колмогорова—Чепмена для любых n имеем

$$P_{jj}(n+1) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{jk}(n) P_{kj} \geq \sum_{k=0}^{N} P_{jk}(n) P_{kj},$$

N произвольное. Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\pi_j \geq \sum_{k=0}^{N} \pi_k P_{kj},$$

а т. к. N произвольно, то и

$$\pi_j \geq \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{kj}, \ j = 0, 1, \ldots \tag{2.1.13}$$

На самом деле все нестрогие неравенства (2.1.13) являются равенствами. Если предположить, что хотя бы одно из неравенств (2.1.13) строгое и просуммировать все неравенства (2.1.13), то получим противоречие:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j > \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{kj} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \sum_{j=0}^{\infty} P_{kj} = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k.$$

Откуда следует, что для всех $j = 0, 1, \ldots$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{kj} = \pi_j.$$

Так что эргодическое распределение всегда является стационарным.

Убедимся, что в ненулевой (неприводимой) цепи эргодическое распределение $\{\pi_i\}$ является собственным стационарным распределением.

Эргодическое распределение $\{\pi_j\}$ всегда является стационарным: для любого n

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{kj}(n) = \pi_j, \ j = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.1.14}$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $n \to \infty$, причем в левой части под знаком суммы (если такой предельный переход возможен), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \pi_j = \pi_j.$$

Отсюда, поскольку класс ненулевой и, следовательно $\pi_j \neq 0$, имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1,$$

т. е. эргодическое распределение в ненулевом классе является собственным.

Убедимся, что в левой части равенства (2.1.14) можно перейти к пределу при $n \to \infty$ под знаком суммы. Для этого оценим сверху разность

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{kj}(n) - \pi_j \right|.$$

Имеем

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{kj}(n) - \pi_j \right| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{kj}(n) - \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \pi_j \right| \le$$

$$\le \left| \sum_{k=0}^{N} \pi_k (P_{kj}(n) - \pi_j) \right| + \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} \pi_k (P_{kj}(n) - \pi_j) \right| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{N} \pi_k |P_{kj}(n) - \pi_j| + 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} \pi_k.$$

Второе слагаемое, как это остаток сходящегося ряда, можно сделать меньше данного ε за счет выбора N. При фиксированном N первое слагаемое меньше ε для достаточно больших n. Так что для любого данного $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{kj}(n) - \pi_j\right| < 2\varepsilon.$$

Последнее неравенство и доказывает справедливость (2.1.14).

Пусть теперь $\{v_j\}$ — собственное стационарное распределение неприводимой возвратной непериодической цепи: для каждого $n = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i P_{ij}(n) = v_j,\ j = 0, 1, \ldots,\ \sum_{j=0}^{\infty} v_j = 1.$$

Убедимся, что $\{v_j\}$ является эргодическим распределением.

Как и в первой части теоремы, переходя в равенстве

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i P_{ij}(n) = v_j$$

к пределу под знаком суммы при $n \to \infty$, получим

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i \pi_j = v_j,\ j = 0, 1, \ldots,$$

(существование пределов $\lim\limits_{n} P_{ij}(n)$ гарантировано возвратностью и непериодичностью неприводимой цепи). И поскольку распределение $\{v_i\}$ собственное, т. е. $\sum\limits_{i=0}^{\infty} v_i = 1$, то

$$v_j = \pi_j, \quad j = 0, 1, \ldots$$

З а м е ч а н и е. В теореме в явном виде непериодичностью мы не пользуемся. Непериодичность вместе с возвратностью обеспечивает существование эргодического распределения.

Р е з ю м е. *Если класс C нулевой, то все предельные значения для $P_{ij}(n)$ известны — они равны нулю (независимо от того класс возвратный или нет, периодический или нет). Если* *же класс C ненулевой (как следствие он возвратный) и непериодический (требование непериодичности цепи не принципиально), то в силу эргодической теоремы существуют предельные (эргодические) значения для $P_{ij}(n)$:*

$$\lim_n P_{ij}(n) = \pi_j, \ j \in C,$$

заведомо отличные от нуля (класс ненулевой).

Эргодическое распределение $\{\pi_j\}$ ненулевого класса эквивалентности совпадает с его собственным стационарным распределением и поэтому эргодическое распределение можно получить как решение системы линейных уравнений

$$\mathbb{P}'\pi = \pi, \ \sum_{i \in C} \pi_i = 1.$$

Пример 2.1.1. *Рассматривается марковская цепь с фазовым пространством $X = \{1, 2, 3\}$, заданная матрицей одношаговых переходных вероятностей*

$$\begin{bmatrix} 4/5 & 1/5 & 0 \\ 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 4/5 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

1° *Существует ли $\lim_n P_{ii}(n)$, $i = 1, 2, 3$?*

2° *Если $\lim_n P_{ii}(n)$, существует, найти его.*

3° *Вычислить среднее $M\tau_i$ времени первого возвращения τ_i в состояние i, $i = 1, 2, 3$.*

Решение. Марковская цепь, описываемая матрицей переходных вероятностей $\mathbb{P}$, неприводимая и непериодическая. Поскольку цепь конечна, то она ненулевая и, как следствие, возвратная. Поэтому согласно эргодической теореме существует

$$\lim_n P_{ii}(n) = \pi_i, \ i = 1, 2, 3.$$

Далее, в неприводимой ненулевой непериодической марковской цепи эргодическое распределение совпадает с собственным стационарным распределением, т. е. удовлетворяет системе

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{P}'\pi & = & \pi, \\ \sum_{j=1}^{3} \pi_j & = & 1, \end{array} \right.$$

или, что то же, системе

$$\begin{cases} \dfrac{4}{5}\pi_1 & + & \dfrac{3}{5}\pi_2 & + & 0\pi_3 & = & \pi_1, \\ \dfrac{1}{5}\pi_1 & + & \dfrac{1}{5}\pi_2 & + & \dfrac{4}{5}\pi_3 & = & \pi_2, \\ 0\pi_1 & + & \dfrac{1}{5}\pi_2 & + & \dfrac{1}{5}\pi_3 & = & \pi_3, \\ \pi_1 & + & \pi_2 & + & \pi_3 & = & 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$$\pi_1 = \frac{12}{17}, \ \pi_2 = \frac{4}{17}, \ \pi_3 = \frac{1}{17}.$$

Согласно эргодической теореме среднее время возвращения

$$M\tau_i = 1/\pi_i, \ i = 1, 2, 3.$$

Эргодическая теорема для периодической цепи. Исследование асимптотического поведения переходных вероятностей $P_{ij}(n)$ при $n \to \infty$ в периодической цепи сводится к их исследованию в непериодической цепи.

Теорема 2.1.5 (эргодическая теорема для периодических цепей). *Пусть* $G = \bigcup\limits_{\nu=0}^{t-1} G_\nu$ — *фазовое пространство неприводимой возвратной периодической с периодом* t *марковской цепи с матрицей переходных вероятностей* $\mathbb{P} = [P_{ij}]$, *матрица* $[Q_{ij}] = \mathbb{Q} = \mathbb{P}(t)$.

Для каждого $i \in G_\nu$ $(\nu = 0, 1, \ldots, t-1)$

$$\lim_n P_{ij}(nt) = \begin{cases} q_j = \lim\limits_n Q_{jj}(n), & \textit{если} \quad j \in G_\nu, \\ 0, & \textit{если} \quad j \notin G_\nu, \end{cases}$$

$$\lim_n P_{ij}(k+nt) = \begin{cases} q_j = \lim\limits_n Q_{jj}(n), & \textit{если} \quad j \in G_{\nu+k}, \\ 0, & \textit{если} \quad j \notin G_{\nu+k}, \end{cases}$$

$k = 1, 2, \ldots, t-1$.

Доказательство. Согласно теореме о структуре периодической цепи (см. теорему 1.3.9) в $\mathbb{Q}$-цепи каждый класс эквивалентности G_ν является неприводимой возвратной непериодической цепью, поэтому для $i, j \in G_\nu$ в силу эргодической теоремы существует $\lim\limits_n Q_{jj}(n)$ и

$$\lim_n Q_{ij}(n) = \lim_n Q_{jj}(n) = q_j.$$

А поскольку

$$P_{ij}(nt) = Q_{ij}(n)$$

(см. 1.3.15), то

$$\lim_n P_{ij}(nt) = \lim_n Q_{ij}(n) = q_j$$

для $i, j \in G_\nu$.

Если $j \notin G_\nu$, то $P_{ij}(nt) = 0$ (за nt шагов из $i \in G_\nu$ можно перейти только в класс G_ν), а значит

$$\lim_n P_{ij}(nt) = 0.$$

Пусть теперь $i \in G_\nu$, $j \in G_{\nu+k}$ $(k = 1, 2, \ldots, t-1)$. Убедимся в справедливости равенства

$$\lim_n P_{ij}(k + nt) = q_j. \tag{2.1.15}$$

Из класса G_ν $\mathbb{P}$-цепь за первые k шагов перейдет в класс $G_{\nu+k}$ (см. теорему 1.3.9), поэтому в силу уравнения Колмогорова—Чепмена

$$P_{ij}(k + nt) = \sum_{s \in G_{\nu+k}} P_{is}(k) P_{sj}(nt). \tag{2.1.16}$$

За последующие nt шагов $\mathbb{P}$-цепь из класса $G_{\nu+k}$ переходит только в класс $G_{\nu+k}$ (см. теорему 1.3.9).

При $n \to \infty$ правая часть равенства (2.1.16) имеет предел, равный q_j. Убедимся в этом. Для этого оценим сверху разность

$$\left| \sum_{s \in G_{\nu+k}} P_{is}(k) P_{sj}(nt) - q_j \right|.$$

Имеем

$$\left| \sum_{s \in G_{\nu+k}} P_{is}(k) P_{sj}(nt) - q_j \right|$$

$$= \left| \sum_{s \in G_{\nu+k}} P_{is}(k) P_{sj}(nt) - \sum_{s \in G_{\nu+k}} P_{is}(k) q_j \right| \le$$

$$\le \sum_{s \in M} P_{is}(k) \left| P_{sj}(nt) - q_j \right| + \sum_{s \in G_{\nu+k} \setminus M} P_{is}(k) \left| P_{sj}(nt) - q_j \right| \le$$

$$\le \sum_{s \in M} P_{is}(k) \left| P_{sj}(nt) - q_j \right| + 2 \sum_{s \in G_{\nu+k} \setminus M} P_{is}(k).$$

Для данного $\varepsilon > 0$, выбрав конечное подмножество $M \subset G_{\nu+k}$ так, чтобы

$$\sum_{s \in G_{\nu+k} \setminus M} P_{is}(k) \le \varepsilon,$$

а затем (при фиксированном M) n настолько большим, чтобы

$$\sum_{s \in M} P_{is}(k) \left| P_{sj}(nt) - q_j \right| < \varepsilon,$$

получаем, что при достаточно больших n

$$\left| \sum_{s \in G_{\nu+k}} P_{is}(k) P_{sj}(nt) - q_j \right| \le \varepsilon.$$

Так что правая часть равенства (2.1.16), а вместе с ней и вероятность $P_{ij}(k + nt)$, при $n \to \infty$ имеет предел, равный q_j.

Если $j \notin G_{\nu+k}$, то $P_{ij}(k + nt) = 0$ и, следовательно,

$$\lim_n P_{ij}(k + nt) = 0.$$

Пример 2.1.2. *Найти предельные значения $P_{ij}(n)$ при $n \to \infty$ (если они существуют) для марковской цепи, заданной матрицей переходных вероятностей*

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение. Марковская цепь периодична с периодом 2. Согласно теореме о структуре марковской цепи фазовое пространство G цепи представимо в виде объединения непересекающиеся классов G_0 и G_1, причем за 2 шага $\mathbb{P}$-цепь переходит из класса G_ν в класс G_ν, $\nu = 0, 1$. Матрица переходных вероятностей

$$\mathbb{Q} = \mathbb{P}(2) = (\mathbb{P})^2,$$

подробнее

$$\mathbb{Q} = \mathbb{P} \cdot \mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5/8 & 3/8 \\ 0 & 0 & 5/8 & 3/8 \end{bmatrix}.$$

Матрица переходных вероятностей класса эквивалентности $G_0 = \{1, 2\}$ имеет вид

$$\mathbb{Q}_0 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix},$$

класса эквивалентности $G_1 = \{3, 4\}$ —

$$\mathbb{Q}_1 = \begin{bmatrix} 5/8 & 3/8 \\ 5/8 & 3/8 \end{bmatrix}.$$

Далее воспользуемся эргодической теоремой для периодической цепи (теорема 2.1.5).

Для непериодического возвратного класса $G_0 = \{1, 2\}$ с матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$\mathbb{Q}_0 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

найдем эргодическое распределение $\{q_1, q_2\}$, оно совпадает с собственным стационарным распределением цепи, т. е. является решением системы

$$\begin{cases} \mathbb{Q}_0' q &= q, \\ q_1 + q_2 &= 1, \end{cases}$$

где $q = (q_1, q_2)'$. Подробнее:

$$\left\{\begin{array}{rcl} q_1/2 + q_2/2 & = & q_1, \\ q_1/2 + q_2/2 & = & q_2, \\ q_1 + \ q_2 & = & 1. \end{array}\right.$$

Решением этой системы является

$$q_1 = \frac{1}{2}, \ q_2 = \frac{1}{2}.$$

Аналогично находим эргодическое распределение $\{q_3, q_4\}$ непериодического возвратного класса $G_1 = \{3, 4\}$ с матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$\mathbb{Q}_1 = \left[\begin{array}{cc} 5/8 & 3/8 \\ 5/8 & 3/8 \end{array}\right]$$

как решение системы

$$\left\{\begin{array}{rcl} (5/8)q_3 + (5/8)q_4 & = & q_3, \\ (3/8)q_3 + (3/8)q_4 & = & q_4, \\ q_3 + \ q_4 & = & 1, \end{array}\right.$$

где $q = (q_3, q_4)'$. Имеем

$$q_3 = \frac{5}{8}, \ q_4 = \frac{3}{8}.$$

Поэтому согласно эргодической теореме для периодических цепей имеем: для $i \in \{1, 2\}$

$$\lim_n P_{ij}(2n) = \left\{\begin{array}{ll} q_j = \lim\limits_n Q_{jj}(n), & j \in \{1, 2\}; \\ 0, & j \in \{3, 4\}; \end{array}\right.$$

$$\lim_n P_{ij}(2n+1) = \left\{\begin{array}{ll} q_j = \lim\limits_n Q_{jj}(n), & j \in \{3, 4\}; \\ 0, & j \in \{1, 2\}; \end{array}\right.$$

для $i \in \{3, 4\}$

$$\lim_n P_{ij}(2n) = \left\{\begin{array}{ll} q_j = \lim\limits_n Q_{jj}(n), & j \in \{3, 4\}; \\ 0, & j \in \{1, 2\}; \end{array}\right.$$

$$\lim_n P_{ij}(2n+1) = \begin{cases} q_j = \lim\limits_n Q_{jj}(n), & j \in \{1,2\}; \\ 0, & j \in \{3,4\}. \end{cases}$$

Вероятности поглощения. Следующая далее теорема описывает предельное поведение $P_{ij}(n)$ при $n \to \infty$, когда i — несущественное состояние, а состояние j принадлежит некоторому классу эквивалентности C. Класс C будем считать непериодическим (исследование периодической цепи сводится к исследованию непериодической).

Далее через $\pi_i(C)$ будем обозначать вероятность того, что цепь, стартовав из несущественного состояния i, достигнет возвратного класса C.

Теорема 2.1.6 (о вероятностях поглощения). *Если i — несущественное состояние, состояние j принадлежит возвратному непериодическому классу C, то*

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}(n) = \pi_i(C)\pi_j,$$

где $\pi_j = \lim\limits_n P_{jj}(n)$.

Доказательство. Оценим разность $|P_{ij}(n) - \pi_i(C)\pi_j|$. Обозначим через $\pi_{ik}^{(\nu)}(C)$ вероятность того, что цепь, стартовав из невозвратного состояния i, войдет в класс C через состояние k на ν-м шаге (заметим, что цепь, попав в класс C, из него не выйдет, поскольку C — класс эквивалентности). Тогда для $\pi_i(C)$ имеет место представление

$$\pi_i(C) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k\in C} \pi_{ik}^{(\nu)}(C),$$

а для $P_{ij}(n)$ — представление

$$P_{ij}(n) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k\in C} \pi_{ik}^{(\nu)}(C) P_{kj}(n-\nu)$$

— цепь, стартовав из состояния i, входит в класс C (через одно из его состояний k) на некотором шаге ν $(1 \le \nu \le n)$, а затем за оставшиеся $n-\nu$ шагов из состояния k попадает в состояние j.

Используя приведенные представления для $\pi_i(C)$ и $P_{ij}(n)$, оценим разность

$$|P_{ij}(n) - \pi_j\pi_i(C)|$$

(далее C' — конечное подмножество C):

$$|P_{ij}(n)-\pi_j\pi_i(C)| = \left|\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k\in C}\pi_{ik}^{(\nu)}(C)P_{kj}(n-\nu) - \pi_j\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{k\in C}\pi_{ik}^{(\nu)}(C)\right| =$$

$$= \left|\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k\in C}\pi_{ik}^{(\nu)}(C)(P_{kj}(n-\nu)-\pi_j) - \pi_j\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{k\in C}\pi_{ik}^{(\nu)}(C)\right| =$$

$$= \left|\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k\in C'}\pi_{ik}^{(\nu)}(C)(P_{kj}(n-\nu)-\pi_j)+\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k\in C\setminus C'}\pi_{ik}^{(\nu)}(C)(P_{kj}(n-\nu)-\pi_j) - \pi_j\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{k\in C}\pi_{ik}^{(\nu)}(C)\right| \le$$

$$\le \sum_{\nu=1}^{N}\sum_{k\in C'}\pi_{ik}^{(\nu)}(C)|P_{kj}(n-\nu)-\pi_j|+$$

$$+\sum_{\nu=N+1}^{n}\sum_{k\in C'}\pi_{ik}^{(\nu)}(C)|P_{kj}(n-\nu)-\pi_j|+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k\in C\setminus C'}\pi_{ik}^{(\nu)}(C)|P_{kj}(n-\nu)-\pi_j| + \pi_j\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{k\in C}\pi_{ik}^{(\nu)}(C) \le$$

$$\le \sum_{\nu=1}^{N}\sum_{k\in C'}\pi_{ik}^{(\nu)}(C)|P_{kj}(n-\nu)-\pi_j|+$$

$$+2\sum_{\nu=N+1}^{n}\sum_{k\in C'}\pi_{ik}^{(\nu)}(C)+$$

$$+2\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k\in C\setminus C'}\pi_{ik}^{(\nu)}(C) + \pi_j\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{k\in C}\pi_{ik}^{(\nu)}(C).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное фиксированное. Выберем N так, чтобы вторая сумма, как остаток сходящегося ряда, была меньше ε (и зафиксируем N). Выберем конечное C' так, чтобы третья сумма, как остаток сходящегося ряда, была меньше ε (и зафиксируем C'). Четвертая сумма при достаточно больших n меньше ε (как остаток сходящегося ряда). И, наконец, первая сумма при достаточно больших n, как конечное число "малых" слагаемых, меньше ε — каждое слагаемое мало при больших n в силу эргодической теоремы. Так что при достаточно больших n

$$|P_{ij}(n) - \pi_j \pi_i(C)| \le 4\varepsilon,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Пример 2.1.3. *Пусть марковская цепь задана матрицей одношаговых переходных вероятностей*

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Найти $\lim\limits_n P_{ij}(n)$ *для всех пар* $(i,\ j)$.

Решение. Состояние $\{5\}$ — несущественное, классы эквивалентности $C_1 = \{1, 2, 3\}$ и $C_2 = \{4\}$ являются ненулевыми непериодическими. Поэтому для вычисления $\lim\limits_n P_{ij}(n),\ i, j = 1, 2, 3$, можно воспользоваться теоремой о стационарном и эргодическом распределениях (см. теорему 2.1.4), $\lim\limits_n P_{44}(n)$, очевидно, равен 1.

Далее, $P_{i4}(n) = 0$ для $i = 1, 2, 3$ и $P_{4j}(n) = 0$ для $j = 1, 2, 3$, поскольку состояние 4 и состояния $1, 2, 3$ принадлежат разным классам эквивалентности.

Значения $\lim\limits_n P_{i5}(n) = 0,\ i = 1, 2, 3,$ и $\lim\limits_n P_{45}(n) = 0$ т. к. состояния $\{1, 2, 3\}$, $\{4\}$ образуют классы эквивалентности, которым состояние $\{5\}$ не принадлежит.

Для вычисления $\lim\limits_n P_{5j}(n),\ j = 1, 2, 3, 4$ воспользуемся теоремой о вероятностях поглощения (см. теорему 2.1.6):

$$\lim_n P_{5j}(n) = \pi_5(C_1)\pi_j,\ j = 1, 2, 3;$$

$$\lim_n P_{54}(n) = \pi_5(C_2)\pi_4.$$

Легко видеть, что

$$\pi_5(C_1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots = \frac{1}{2};$$

$$\pi_5(C_2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots = \frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$\lim_n P_{5j}(n) = \pi_5(C_1)\pi_j = \pi_j/2,\ j = 1, 2, 3;$$

$$\lim_n P_{54}(n) = \pi_5(C_2)\pi_4 = 1/2.$$

Вероятности $\pi_j,\ j = 1, 2, 3$, находим, пользуясь теоремой о стационарном и эргодическом распределении (см. теорему 2.1.4): $\pi_1 = 7/15$, $\pi_1 = 4/15$, $\pi_1 = 4/15$.

О предельном поведении марковской цепи. Как известно, множество всех состояний марковской цепи — фазовое пространство — распадается на несущественные состояния и непересекающиеся классы существенных состояний — классы эквивалентности (некоторые классы эквивалентности могут состоять из одного состояния). Мы исследовали предельное поведение $P_{ij}(n)$ при $n \to \infty$ для всех возможных пар i, j :

1° *Для несущественного состояния* j

$$\lim_n P_{ij}(n) = 0,$$

вне зависимости от того, каким является состояние i *— существенным или несущественным.*

2° *Если состояния* i *и* j *принадлежат разным классам эквивалентности, то*

$$\lim_n P_{ij}(n) = 0,$$

поскольку $P_{ij}(n) = 0$ *для всех* n.

3° *Состояния* j *и* i *принадлежат одному классу эквивалентности. Если класс эквивалентности нулевой, то*

$$\lim_n P_{ij}(n) = 0.$$

Если класс эквивалентности ненулевой, то

$$\lim_n P_{ij}(n) = \pi_j,\ j \in C,$$

— в силу эргодической теоремы.

Из приведенных результатов о поведении $P_{ij}(n)$ при $n \to \infty$ следует, что при $n \to \infty$ распределение

$$Q_n(\{k\}) = P\{\xi_n = k\},\ k \in X,$$

марковской цепи всегда сходится к некоторому предельному распределению:

1° *В нулевом классе эквивалентности C для любого $N > 0$ при $n \to \infty$*

$$P\{|\xi_n| > N\} \to 1$$

— *"цепь уходит в бесконечность"* (*см. теорему* 1.3.4).

Если класс C нулевой возвратный, то цепь, уходя в бесконечность из данного состояния j, с вероятностью 1 *возвращается в него бесконечное число раз, если же класс C нулевой невозвратный, то цепь с вероятностью* 1 *возвращается в состояние i конечное число раз.*

2° *В ненулевом классе эквивалентности существует собственное предельное распределение цепи, совпадающее с эргодическим:*

$$\lim Q_n(\{k\}) = \lim P\{\xi_n = k\} = \pi_k,\ k \in C.$$

3° *Цепь, стартующая из несущественного состояния i, "поглощается" классом (классами) эквивалентности. При этом цепь, будучи поглощенной нулевым классом, уходит в бесконечность, если же цепь поглощается ненулевым классом эквивалентности, то ее распределение сходится к собственному эргодическому распределению.*

Критерии возвратности и невозвратности марковской цепи. Далее приводятся необходимые и достаточные условия невозвратности марковской цепи в терминах существования решения некоторой системы линейных уравнений и достаточные условия возвратности цепи в терминах существования решения некоторой системы линейных неравенств.

Теорема 2.1.7 (критерий невозвратности цепи). *Пусть B — неприводимая марковская цепь с фазовым пространством $X = \{0, 1, \ldots\}$ и матрицей переходных вероятностей $\mathbb{P} = [P_{ij}]$. Для того, чтобы марковская цепь B была невозвратной, необходимо и достаточно, чтобы система уравнений*

$$y_i = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} y_j,\ i = 1, 2, \ldots, \tag{2.1.17}$$

имела ограниченное отличное от константы решение.

Доказательство. В неприводимой марковской цепи B с фазовым пространством $X = \{0, 1, \ldots\}$ и матрицей переходных вероятностей $\mathbb{P} = [P_{ij}]$ вероятности достижения f^*_{i0} удовлетворяют равенствам

$$f^*_{i0} = P_{i0} + \sum_{j\in X\setminus\{0\}} P_{ij} f^*_{j0},\ i = 1, 2, \ldots \tag{2.1.18}$$

(см. (1.3.7)). Равенства (2.1.18) означают, что последовательность

$$y_0 = 1,\ y_j = f^*_{j0},\ j = 1, 2, \ldots \tag{2.1.19}$$

всегда является решением системы (2.1.17).

Если цепь B невозвратная, то найдется j ($j = 1, 2, \ldots$) такое, что

$$f^*_{j0} < 1$$

(см. теорему 1.3.7). И следовательно, для невозвратной цепи B существует ограниченное отличное от константы решение системы (2.1.17). Таким решением, например, является (2.1.19).

Пусть система (2.1.17) имеет отличное от константы ограниченное решение $\{y_j\}$:

$$|y_j| \le C < \infty,\ j = 0, 1, \ldots$$

Докажем, что тогда цепь B невозвратная.

Ограниченное отличное от константы решение системы (2.1.17) можно считать таким, что

$$y_0 = 1,\ 0 \le y_j \le 2,\ j = 0, 1, \ldots. \tag{2.1.20}$$

В самом деле, вместе с каждым решением $\{y_j\}$ системы (2.1.17) его линейное преобразование:

$$z_i = ay_i + b,\ i = 0, 1, \ldots$$

(для любых a и b) также будет решением этой системы. За счет выбора a и b для значений

$$z_i = ay_i + b, i = 0, 1, \ldots,$$

можно обеспечить выполнение условий

$$z_0 = 1,\ 0 \le z_i \le 2,\ i = 0, 1, \ldots,$$

(см. рис. 2.1.1), например, потребовав, чтобы a и b в линейном преобразовании $z = ay + b$ удовлетворяли системе

$$\begin{cases} aC + b \le 2, \\ -aC + b \ge 0, \\ ay_0 + b = 1 \end{cases}$$

(систему можно решить, выразив b из уравнения $ay_0 + b = 1$ и подставив его в неравенства).

Так что далее решение $\{y_j\}$ системы (2.1.17) такое, что

$$y_0 = 1,\ 0 \le y_j \le 2,\ j = 0, 1, 2 \ldots$$

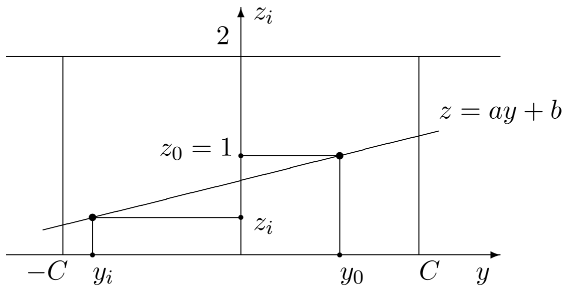

Рис. 2.1.1.

Далее, вместе с марковской цепью B с матрицей одношаговых переходных вероятностей $\mathbb{P} = [P_{ij}]$ рассмотрим марковскую цепь $\tilde{B}$ (ее параметры будем "маркировать" значком $\sim$) с матрицей одношаговых переходных вероятностей $\tilde{\mathbb{P}} = [\tilde{P}_{ij}]$, у которой состояние 0 является поглощающим экраном (далее $\{0\} = C_0$), а вероятности перехода между другими состояниями те же, что и в цепи B. Цепь $\tilde{B}$ получена из цепи B превращением состояния 0 в поглощающий экран. Матрица переходных вероятностей $\tilde{\mathbb{P}}$ цепи $\tilde{B}$ имеет вид

$$\tilde{\mathbb{P}} = [\tilde{P}_{ij}] = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{00} & \tilde{P}_{01} & \tilde{P}_{02} & \ldots \\ \tilde{P}_{10} & \tilde{P}_{11} & \tilde{P}_{12} & \ldots \\ \tilde{P}_{20} & \tilde{P}_{21} & \tilde{P}_{22} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \ldots \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \tag{2.1.21}$$

т. е.

$$\tilde{P}_{00} = 1, \tilde{P}_{0j} = 0,\ j = 1, 2, \ldots$$

$$\tilde{P}_{ij} = P_{ij},\ i = 1, 2, \ldots,\ j = 0, 1, \ldots$$

Каждое из состояний i, $i = 1, 2, \ldots$, в цепи $\tilde{B}$ несущественное (а следовательно, и невозвратное) — поскольку цепь B неприводима, то состояние 0 достижимо из каждого состояния i $(i \neq 0)$ в цепи B, а, следовательно, и в цепи $\tilde{B}$, поскольку $P_{i0} = \tilde{P}_{i0}$, $i = 1, 2, \ldots$ А так как $C_0 = \{0\}$ — поглощающий экран в цепи $\tilde{B}$, то состояния $i = 1, 2, \ldots$ в цепи $\tilde{B}$ несущественные.

Ограниченное отличное от константы решение $\{y_j\}$ $(y_0 = 1,\ 0 \le y_j \le 2,\ j = 0, 1, 2 \ldots)$ системы (2.1.17) при каждом $n = 1, 2, \ldots$, является решением и системы

$$y_i = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{P}_{ij}(n) y_j,\ i = 0, 1, \ldots \tag{2.1.22}$$

В самом деле, $\{y_j\}$ — решение системы

$$y_i = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{P}_{ij} y_j,\ i = 0, 1, \ldots,$$

поскольку при $i = 1, 2, \ldots$ уравнения этой системы совпадают с уравнениями системы (2.1.17), а при $i = 0$ соответствующее уравнение последней системы имеет вид

$$y_0 = \tilde{P}_{00} \cdot y_0,$$

или

$$y_0 = 1 \cdot y_0.$$

Из

$$y_i = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{P}_{ij} y_j, i = 0, 1, \ldots,$$

$$y_j = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}_{jk} y_k, j = 0, 1, \ldots,$$

имеем

$$y_i = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{P}_{ij} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}_{jk} y_k = \sum_{k=0}^{\infty} y_k \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{P}_{ij} \tilde{P}_{jk} = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}_{ik}(2) y_k$$

т. е.

$$y_i = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}_{ik}(2) y_k$$

и так далее. Так что для каждого $n = 1, 2, \ldots$ система (2.1.22) имеет своим решением ограниченное отличное от константы решение $\{y_j\}$ системы (2.1.17).

Из (2.1.22) для каждого $n = 1, 2, \ldots$ имеем

$$y_i = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{P}_{ij}(n) y_j \geq \tilde{P}_{i0}(n) y_0 = \tilde{P}_{i0}(n), \ i = 0, 1, 2, \ldots$$

т. е.

$$\tilde{P}_{i0}(n) \leq y_i, \ i = 0, 1, 2 \ldots$$

Переходя в полученных неравенствах к пределу при $n \to \infty$ в силу теоремы о вероятностях поглощения (см. теорему 2.1.6) получим

$$\tilde{\pi}_i(C_0) \tilde{\pi}_0 \leq y_i, \ i = 0, 1, 2, \ldots,$$

а, учитывая, что $\tilde{\pi}_0 = 1$,

$$\tilde{\pi}_i(C_0) \leq y_i, \ i = 0, 1, 2, \ldots$$

И поскольку

$$\tilde{\pi}_i(C_0) = f_{i0}^*, \, i = 0, 1, 2, \ldots,$$

то для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$

$$f_{i0}^* \leq y_i.$$

Последовательность $\{y_i\}$ не является постоянной, а $y_0 = 1$, поэтому найдутся такие y_k, что $y_k < 1$ или $y_k > 1$. Если найдется $y_k < 1$, то

$$f_{k0}^* \leq y_k < 1.$$

И, следовательно, цепь B невозвратна — у возвратной цепи все f_{kj}^*, и в частности f_{k0}^*, равны 1.

Если все $y_k > 1$, то

$$z_i = -y_i + 2, \qquad i = 0, 1, \ldots$$

— ограниченное отличное от константы решение системы (2.1.17), причем $z_i < 1$. И мы приходим к уже рассмотренной ситуации.

Тем самым теорема доказана.

Теорема 2.1.8 (достаточное условие возвратности цепи). *Пусть B — неприводимая марковская цепь с фазовым пространством $X = \{0, 1, \ldots\}$ и матрицей переходных вероятностей $\mathbb{P} = [P_{ij}]$. Достаточным условием возвратности цепи B является существование стремящегося к $+\infty$ решения $\{y_j\}$ системы неравенств*

$$y_i \geq \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} y_j, \; i = 1, 2, \ldots \tag{2.1.23}$$

Доказательство. Пусть $\{y_j\}$ — стремящееся к $+\infty$ решение системы неравенств (2.1.23). Будем считать его положительным, поскольку вместе с каждым решением $\{y_j\}$ системы (2.1.23) ее решением будет

$$z_j = y_j + b, \; j = 0, 1, 2, \ldots$$

Решение $\{y_j\}$ системы неравенств (2.1.23) при каждом $n = 1, 2, \ldots$ является решением и системы неравенств

$$y_i \geq \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{P}_{ij}(n) y_j, \; i = 0, 1, \ldots \tag{2.1.24}$$

($\tilde{P}_{ij}$ и $\tilde{P}_{ij}(n)$ введены в доказательстве теоремы 2.1.7). В самом деле, $\{y_j\}$ — решение системы неравенств

$$y_i \geq \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{P}_{ij} y_j, \; i = 0, 1, \ldots$$

Из

$$y_i \geq \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{P}_{ij} y_j, \; i = 0, 1, \ldots,$$

$$y_j \geq \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}_{jk} y_k, \; j = 0, 1, \ldots,$$

имеем

$$y_i \geq \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{P}_{ij} y_j \geq \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{P}_{ij} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}_{jk} y_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}_{ik}(2) y_k, \; i = 0, 1, \ldots,$$

или

$$y_i \geq \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}_{ik}(2) y_k, \; i = 0, 1, \ldots,$$

и так далее. Так что для каждого $n = 1, 2, \ldots$ система неравенств (2.1.24) имеет своим решением стремящееся к $+\infty$ решение $\{y_j\}$. системы неравенств (2.1.23).

Из (2.1.24) для каждого $n = 1, 2, \ldots$ имеем

$$y_i \geq \sum_{j=0}^{M-1} \tilde{P}_{ij}(n) y_j + \sum_{j=M}^{\infty} \tilde{P}_{ij}(n) y_j \geq$$

$$\geq \sum_{j=0}^{M-1} \tilde{P}_{ij}(n) y_j + \min_{r \geq M} \{y_r\} \sum_{j=M}^{\infty} \tilde{P}_{ij}(n) =$$

$$= \sum_{j=0}^{M-1} \tilde{P}_{ij}(n) y_j + \min_{r \geq M} \{y_r\} \left(1 - \sum_{j=0}^{M-1} \tilde{P}_{ij}(n) \right),$$

т. е.

$$y_i \geq \sum_{j=0}^{M-1} \tilde{P}_{ij}(n) y_j + \min_{r \geq M} \{y_r\} \left(1 - \sum_{j=0}^{M-1} \tilde{P}_{ij}(n) \right), \; i = 1, 2, \ldots$$

Перейдем в этих неравенствах к пределу при $n \to \infty$. Для $i = 1, 2, \ldots, j \neq 0$ получим

$$\lim_{n} \tilde{P}_{ij}(n) = 0,$$

поскольку в цепи $\tilde{B}$ все состояния $j = 1, 2, \ldots$ несущественные. Для $i = 1, 2, \ldots$ и $j = 0$ в силу теоремы о вероятностях поглощения

$$\lim_{n} \tilde{P}_{ij}(n) = \tilde{\pi}_i(C_0) \tilde{\pi}_0 = \tilde{\pi}_i(C_0),$$

поскольку $i = 1, 2, \ldots$ — несущественные состояния, а класс $\{0\} = C_0$ в цепи $\tilde{B}$ возвратный. Так что в результате предельного перехода имеем

$$y_i \geq \tilde{\pi}_i(C_0)y_0 + \min_{r \geq M}\{y_r\}(1 - \tilde{\pi}_i(C_0)),\ i = 1, 2, \ldots$$

Отсюда

$$1 - \tilde{\pi}_i(C_0) \leq \frac{y_i - \tilde{\pi}_i(C_0)y_0}{\min\limits_{r \geq M}\{y_r\}},\ i = 1, 2, \ldots$$

Перейдем в последнем неравенстве к пределу при $M \to \infty$. Так как $y_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то и $\min\limits_{r \geq M}\{y_r\} \to \infty$ при $M \to \infty$, поэтому в пределе имеем

$$1 - \tilde{\pi}_i(C_0) \leq 0,\ i = 1, 2, \ldots,$$

и следовательно,

$$\tilde{\pi}_i(C_0) = 1,\ i = 1, 2, \ldots$$

А поскольку

$$\tilde{\pi}_i(C_0) = f_{i0}^*,\ i = 1, 2, \ldots,$$

то

$$f_{i0}^* = 1,\ i = 1, 2, \ldots$$

Поэтому цепь B возвратна — в невозвратной цепи хотя бы для одного i значение $f_{i0}^* < 1$ (см. теорему 1.3.7).

2.2 Дискретная марковская цепь, описывающая очередь

Важным приложением марковских цепей является теория массового обслуживания. Рассмотрим одну из простейших ее задач — обслуживание с ожиданием.

Заявки в случайные моменты времени поступают к месту обслуживания и становятся в очередь. Обслуживание одной заявки занимает фиксированное время — будем считать его равным 1. За единицу времени обслуживается одна заявка. Начинается и заканчивается обслуживание в целочисленные моменты времени. Найти распределение длины очереди в момент времени n, если не при всех n, то хотя бы при достаточно больших, т. е. в установившемся режиме.

Обозначим через η_n число заявок, ждущих обслуживания к моменту времени n — длину очереди из заявок к моменту времени n. Случайную величину η_n будем называть состоянием системы обслуживания в момент времени n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ В течение времени обслуживания данной заявки могут поступать новые заявки. Обозначим через ξ_n число заявок, поступивших за период обслуживания $[n, n+1)$, число заявок ξ_n является случайной величиной, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Будем предполагать, что случайные величины ξ_n, $n = 0, 1, \ldots$, независимы и одинаково распределены, каждая с распределением

$$P\{\xi_n = k\} = a_k, \; k = 0, 1, \ldots$$

Ясно, что по истечении периода обслуживания $[n, n+1)$ система из состояния η_n переходит в состояние

$$\eta_{n+1} = (\eta_n - 1)^+ + \xi_n, \; \eta_0 = 0, \; n = 0, 1, \ldots \tag{2.2.1}$$

Последовательность случайных величин $\{\eta_n\}$ образует марковскую цепь. Чтобы убедиться в этом, проверим, что для $\{\eta_n\}$ выполняется марковское свойство. Имеем, учитывая, что случайные величины $\{\xi_n\}$ независимы,

$$P\{\eta_{n+1} = j | \eta_n = i, \eta_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \eta_0 = i_0\} =$$

$$= P\{(\eta_n - 1)^+ + \xi_n = j \,| \eta_n = i, \eta_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \eta_0 = i_0\} =$$

$$= \frac{P\{(i-1)^+ + \xi_n = j, \eta_n = i, \eta_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \eta_0 = i_0\}}{P\{\eta_n = i, \eta_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \eta_0 = i_0\}} =$$

$$= P\{(i-1)^+ + \xi_n = j\} = P\{\xi_n = j - (i-1)^+\}.$$

Аналогично

$$P\{\eta_{n+1} = j | \eta_n = i\} = P\{\xi_n = j - (i-1)^+\}. \tag{2.2.2}$$

Так что последовательность случайных величин $\{\eta_n\}$ — длина очереди из заявок, ждущих обслуживания к моменту n, обладает марковским свойством, и, следовательно, является марковской цепью. Элементы матрицы переходных вероятностей этой цепи (см. 2.2.2) имеют вид

$$P_{ij} = P\{\eta_{n+1} = j | \eta_n = i\} = P\{\xi_n = j - (i-1)^+\}, \; i, j = 0, 1, \ldots$$

(чтобы цепь за период обслуживания перешла из состояния i в состояние j, за этот период должно поступить $j - (i-1)^+$

заявок). Цепь стационарная — переходные вероятности P_{ij} не зависит от n, поскольку ξ_n одинаково распределены.

Поскольку ξ_n — неотрицательная целочисленная случайная величина с распределением

$$P\{\xi_n = k\} = a_k,\ k = 0, 1, \ldots$$

(значения $P\{\xi_n = k\} = 0,\ k = -1, -2, \ldots$), то элементы

$$P_{ij} = P\{\xi_n = j - (i-1)^+\},\ i, j = 0, 1, \ldots$$

матрицы переходных вероятностей $\mathbb{P}$ можно записать в следующем виде: элементы первой строки $(i = 0)$

$$P_{0j} = P\{\xi_n = j - (0-1)^+\} = P\{\xi_n = j\} = a_j,\ j = 0, 1, \ldots,$$

а элементы, начиная со второй строки $(i \geq 1)$, $j = 0, 1, \ldots,$

$$\begin{aligned} P_{ij} &= P\{\xi_n = j - (i-1)^+\} = \\ &= P\{\xi_n = j - (i-1)\} = a_{j-(i-1)}, \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

при $j - (i-1) < 0$ значения $a_{j-(i-1)} = 0$. Матрица переходных вероятностей цепи

$$\mathbb{P} = [P_{ij}] = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Далее будем предполагать, что $a_k,\ k = 0, 1, \ldots,$ строго больше нуля. Это предположение обеспечивает неприводимость цепи $\{\eta_n\}$.

Среднее число заявок и распределение длины очереди. Интуитивно ясно, что если среднее число заявок

$$M\xi_n = \sum_k k a_k,$$

которые поступают за время обслуживания данной заявки, больше числа заявок, обслуживаемых за период (здесь больше 1):

$$\sum_k k a_k > 1,$$

то с ростом n длина η_n очереди заявок будет неограниченно возрастать. Если же среднее число заявок $\sum\limits_k ka_k$, поступивших за период обслуживания, меньше 1:

$$\sum_k ka_k < 1,$$

то естественно ожидать, что распределение длины очереди должно стремиться к некоторому стационарному (равновесному) распределению.

Теорема 2.2.1. *Если в марковской цепи*

$$\eta_{n+1} = (\eta_n - 1)^+ + \xi_n,\ \eta_0 = 0,\ n = 0, 1, \ldots,$$

описывающей очередь,

$$\sum_{k=0}^{\infty} ka_k > 1,$$

и $a_k > 0,\ k = 0, 1, \ldots,$ *то цепь* $\{\eta_n\}$ *является невозвратной и, как следствие, сходится по вероятности к* ∞.

Доказательство. Условие

$$a_k > 0,\ k = 0, 1, \ldots,$$

обеспечивает неприводимость марковской цепи. Покажем, что если

$$\sum_{k=0}^{\infty} ka_k > 1,$$

то система уравнений

$$y_i = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} y_j,\ i = 1, 2, \ldots \tag{2.2.4}$$

имеет ограниченное отличное от константы решение, что, согласно теореме 2.1.7, является достаточным условием невозвратности цепи.

Будем искать решение системы (2.2.4) в виде

$$y_j = x^j,\ j = 0, 1, \ldots,$$

где x — число из промежутка $(0;1)$, т. е. убедимся в существовании числа $x_0 \in (0;1)$ такого, что $y_j = x_0^j$, $j = 0, 1, \ldots$, является решением (2.2.4).

Если $y_j = x^j$, $j = 0, 1, \ldots$, — решение системы (2.2.4), то

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} x^j = x^i, \ i = 1, 2, \ldots \tag{2.2.5}$$

А поскольку, начиная со второй строки, т. е. при $i \geq 1$, элементы матрицы $\mathbb{P} = [P_{ij}]$ имеют вид

$$P_{ij} = a_{j-(i-1)},$$

причем при $j - (i-1) < 0$ значение $a_{j-(i-1)} = 0$, то

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} x^j = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j-(i-1)} x^j = \sum_{j=i-1}^{\infty} a_{j-(i-1)} x^j, \ i = 1, 2, \ldots,$$

и систему (2.2.5) можно переписать в виде

$$\sum_{j=i-1}^{\infty} a_{j-(i-1)} x^j = x^i, \ i = 1, 2, \ldots,$$

или

$$\sum_{j=i-1}^{\infty} a_{j-(i-1)} x^{j-(i-1)} = x, \ i = 1, 2, \ldots,$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = x, \ i = 1, 2, \ldots$$

(все уравнения системы оказались одинаковыми).

Убедимся, что уравнение

$$f(x) = x,$$

где $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, имеет решение на промежутке $(0, 1)$.

Рассмотрим непрерывную на $[0,1]$ функцию

$$F(x) = f(x) - x.$$

Для $F(x)$ имеем

$$F(0) = f(0) = a_0 > 0;$$

$$F(1) = f(1) - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - 1 = 0,$$

$$F'(x) = f'(x) - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} - 1,$$

$$F'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k - 1 > 0,$$

последнее неравенство имеет место в силу условия теоремы. Поэтому на промежутке $(0,1)$ найдется точка, в которой $F(x)$ отрицательна. И поскольку $F(x)$ непрерывна на $[0,1]$, существует точка $x_0 \in (0;1)$, такая, что

$$F(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0,$$

или, что то же,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k = x_0,$$

а в исходных обозначениях

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} x_0^j = x_0^i, \;\; i = 1, 2, \ldots$$

Вектор

$$y_j = x_0^j, \;\; j = 0, 1, \ldots$$

является ограниченным отличным от константы решением системы (2.2.4), что влечет невозвратность цепи $\{\eta_n\}$.

Неприводимая невозвратная, а, значит, и нулевая цепь $\{\eta_n\}$ с фазовым пространством $X = \{0, 1, \ldots\}$ при $n \to \infty$ сходится по вероятности к $+\infty$ (см. следствие из теоремы 1.3.4). Последнее означает неограниченный рост длины очереди с течением времени.

Утверждение, аналогичное теореме 2.2.1 имеет место, если за единицу времени обслуживается s заявок.

Теорема 2.2.2. *Если в марковской цепи*

$$\eta_{n+1} = (\eta_n - s)^+ + \xi_n,\ \eta_0 = 0,\ n = 0, 1, \dots,$$

описывающей очередь,

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k > s,$$

и $a_k > 0,\ k = 0, 1, \dots,$ *то цепь* $\{\eta_n\}$ *является невозвратной и, как следствие, сходится по вероятности к* $+\infty$.

Теорема 2.2.3. *Если в марковской цепи*

$$\eta_{n+1} = (\eta_n - 1)^+ + \xi_n,\ \eta_0 = 0,\ n = 0, 1, \dots,$$

описывающей очередь,

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k < 1,$$

и $a_k > 0,\ k = 0, 1, \dots,$ *то цепь* $\{\eta_n\}$ *является возвратной и, как следствие, ее распределение сходится к эргодическому распределению.*

Доказательство. Условие

$$a_k > 0,\ k = 0, 1, \dots,$$

обеспечивает неприводимость и непериодичность марковской цепи. Покажем, что в предположении

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k < 1$$

система неравенств

$$y_i \geq \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} y_j,\ i = 1, 2, \dots,$$

имеет решение, стремящееся к $+\infty$, что согласно теореме 2.1.8, является достаточным условием возвратности цепи $\{\eta_n\}$, а, следовательно, и ее эргодичности. Таким решением, в частности, является

$$y_j = j,\ j = 0, 1, \dots$$

Убедимся в этом. Учитывая вид матрицы переходных вероятностей цепи, описывающей очередь (см. (2.2.3)), имеем:

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} j = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j-(i-1)} j = \sum_{j=i-1}^{\infty} a_{j-(i-1)} j =$$

$$= \sum_{j=i-1}^{\infty} a_{j-(i-1)} (j-(i-1)) + \sum_{j=i-1}^{\infty} a_{j-(i-1)} (i-1) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k a_k + (i-1) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k - 1 + i \le i,$$

$i = 1, 2, \ldots$ Так что

$$i \ge \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} j, \ i = 1, 2, \ldots,$$

и, следовательно, в силу теоремы 2.1.8 цепь $\{\eta_n\}$ возвратная.

Согласно теореме 2.1.3 распределение возвратной неприводимой непериодической цепи сходится к эргодическому распределению. Последнее обозначает, что распределение длины очереди с течением времени стремится к предельному распределению.

Утверждение, аналогичное теореме 2.2.3 имеет место, если за единицу времени обслуживается s заявок.

Теорема 2.2.4. *Если в марковской цепи*

$$\eta_{n+1} = (\eta_n - s)^+ + \xi_n, \ \eta_0 = 0, \ n = 0, 1, \ldots,$$

описывающей очередь,

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k < s,$$

и $a_k > 0, \ k = 0, 1, \ldots,$ *то цепь* $\{\eta_n\}$ *является возвратной и, как следствие, ее распределение сходится к эргодическому распределению.*

2.3 Задача о разорении игрока

Игрок G_m (с капиталом m) играет в азартную игру с игроком G_M (с капиталом M), участвуя в серии последовательных партий игры. В результате каждой партии капитал игрока G_m с вероятностью p увеличивается на 1 (за счет игрока G_M) и с вероятностью $q = 1 - p$ уменьшается на 1 (в пользу игрока G_M). Результат каждой партии не зависит от результатов предыдущих партий. Если капитал одного из игроков становится равным нулю, то игрок разоряется, игра прекращается. Найти вероятность разорения игрока G_m.

Обозначим через ξ_k капитал игрока G_m после k-й партии. Последовательность случайных величин $\{\xi_k\}$ образует марковскую цепь, см. пример 1.1.2 (с. 13). Множеством состояний марковской цепи $\{\xi_k\}$ является $\{0, 1, \ldots, n\}$, где $n = m + M$ — суммарный капитал игроков. Матрица переходных вероятностей цепи $\{\xi_k\}$ имеет вид

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.3.1}$$

Состояния $1, 2, \ldots, n-1$ несущественные. Состояния 0 и n являются поглощающими экранами, цепь, попав в поглощающее состояние, остается в нем навсегда. Далее класс $\{0\}$ будем обозначать через C_0, а класс $\{n\}$ — через C_n.

В терминах марковской цепи $\{\xi_k\}$ вероятность разорения игрока G_m — это вероятность поглощения цепи классом C_0. И, следовательно, задача "найти вероятность разорения игрока G_m" в терминах марковской цепи $\{\xi_k\}$ формулируется так: "найти вероятность поглощения цепи $\{\xi_k\}$ классом C_0".

Уравнения для вероятностей поглощения. Пусть $\{\zeta_k\}$ — марковская цепь с матрицей переходных вероятностей $[P_{ij}]$, C — некоторый ее класс эквивалентности, T — множество всех несущественных состояний цепи, i — несущественное состояние цепи. Через $\pi_i(C)$, как и ранее, будем обозначать вероятность того, что цепь, стартуя из несущественного состояния i, рано или поздно достигнет класса C, и, следовательно, будет им поглощена, а через $\pi_i^{(k)}(C)$ — вероятность того, что цепь, стартуя из состояния i, достигнет класса C на k-м шаге ($\pi_i(C)$ будем называть вероятностью поглощения цепи классом C, а $\pi_i^{(k)}(C)$ — вероятностью поглощения цепи классом C на k-м шаге).

Вероятности поглощения $\pi_i(C), i \in T$, *классом* C *цепи с матрицей переходных вероятностей* $[P_{ij}]$, *удовлетворяют системе линейных уравнений*

$$\pi_i(C) = \pi_i^{(1)}(C) + \sum_{j \in T} P_{ij}\pi_j(C),\ i \in T. \tag{2.3.2}$$

Заметим, что $\pi_i^{(1)}(C)$ вычисляется по элементам матрицы переходных вероятностей $[P_{ij}]$:

$$\pi_i^{(1)}(C) = \sum_{j \in C} P_{ij},\ i \in T.$$

Вероятность разорения игрока, играющего с партнером, капитал которого ограничен. Марковская цепь $\{\xi_k\}$, описывающая размер капитала игрока G_m, играющего с партнером G_M, капитал M которого ограничен, имеет конечное число состояний: $0, 1, \ldots, n$ ($n = m+M$ — суммарный капитал игроков G_m и G_M) и её матрица переходных вероятностей $[P_{ij}]$ имеет вид (2.3.1).

Вероятность разорения игрока G_m, накопившего капитал до размера i, равна вероятности поглощения $\pi_i(C_0)$ цепи классом $C_0 = \{0\}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Найдем вероятности

$$u_i = \pi_i(C_0),\ i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

как решение системы уравнений (2.3.2), когда $C = C_0 = \{0\}$, матрица переходных вероятностей $\mathbb{P}$ имеет вид (2.3.1), класс $T = \{1, 2, \ldots, n-1\}$. При этом система (2.3.2) запишется так:

$$\pi_i(C_0) = \pi_i^{(1)}(C_0) + \sum_{j=1}^{n-1} P_{ij}\pi_j(C_0),\ i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{2.3.3}$$

где

$$\pi_i^{(1)}(C_0) = \sum_{j \in C_0} P_{ij} = \sum_{j \in \{0\}} P_{ij} = P_{i0},\ i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

или так:

$$u_i = P_{i0} + \sum_{j=1} P_{ij}u_j,\ i = 1, 2, \dots, n-1. \tag{2.3.4}$$

Первое уравнение (соответствующее $i = 1$) системы (2.3.4) запишется так:

$$u_1 = q + pu_2.$$

Уравнения системы (2.3.4) для $i = 2, 3, \dots, n-2$ имеют вид

$$u_i = qu_{i-1} + pu_{i+1}.$$

Последнее уравнение (при $i = n-1$) системы (2.3.4) имеет вид

$$u_{n-1} = qu_{n-2}.$$

Так что система (2.3.4) запишется так:

$$\left\{\begin{array}{ccc} u_1 & = & q + pu_2, \\ u_2 & = & qu_1 + pu_3, \\ & \vdots & \\ u_i & = & qu_{i-1} + pu_{i+1}, \\ & \vdots & \\ u_{n-2} & = & qu_{n-3} + pu_{n-1}, \\ u_{n-1} & = & qu_{n-2}. \end{array}\right. \tag{2.3.5}$$

Будем искать решение системы (2.3.5) отдельно для случая $q \neq p$ и для случая $q = p = 1/2$.

Пусть $q \neq p$. Сначала найдем решение системы

$$u_i = qu_{i-1} + pu_{i+1},\ i = 2, 3, \dots, n-2. \tag{2.3.6}$$

Будем искать решение в виде $u_i = x^i,\ i = 2, 3, \dots, n-2$. Подставляя $u_i = x^i,\ i = 2, 3, \dots, n-2$, в уравнения

$$u_i = qu_{i-1} + pu_{i+1},\ i = 2, 3, \dots, n-2,$$

получим:

$$x^i = qx^{i-1} + px^{i+1},\ i = 2, 3, \dots, n-2,$$

или

$$px^2 + q = x.$$

Это квадратное уравнение имеет два решения: $x = 1$ и $x = q/p$.

При $x = 1$ имеем

$$u_i = \pi_i(C_0) = x^i = 1,\ i = 2, 3, \ldots, n-2.$$

Но $u_i,\ i = 2, 3, \ldots, n-2,$ — вероятности поглощения цепи классом C_0, и они не могут быть равны 1, поскольку цепь с ненулевой вероятностью может быть поглощена и классом $C_n = \{n\}$, поэтому решение $\pi_i(C_0) = u_i = 1,\ i = 2, 3, \ldots, n-2$, системы (2.3.6) мы не можем рассматривать в качестве вероятностей поглощения классом C_0.

Для $x = q/p$ — второго корня квадратного уравнения — имеем такое решение системы (2.3.6):

$$u_i = \left(\frac{q}{p}\right)^i,\ i = 2, 3, \ldots, n-2.$$

Вместе с решением u_i, $i = 2, 3, \ldots, n-2$, системы уравнений (2.3.6), ее решением является и

$$A + Bu_i,\ i = 2, 3, \ldots, n-2,$$

для любых констант A и B (в последнем убеждаемся непосредственной проверкой). Выберем константы A и B так, чтобы это решение было решением также первого и последнего уравнений системы (2.3.5).

Из первого уравнения

$$u_1 = q + pu_2$$

системы (2.3.5) имеем:

$$A + Bu_1 = q + p(A + Bu_2),$$

$$A(1-p) = q + B(pu_2 - u_1),$$

$$Aq = q + B\left(p\left(\frac{q}{p}\right)^2 - \frac{q}{p}\right),$$

$$Aq = q - Bq,$$

$$A + B = 1.$$

Из последнего уравнения

$$u_{n-1} = qu_{n-2}$$

системы (2.3.5) получаем:

$$A + Bu_{n-1} = q(A + Bu_{n-2}),$$

$$A(1-q) = B(qu_{n-2} - u_{n-1}),$$

$$Ap = B\left(q\left(\frac{q}{p}\right)^{n-2} - \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right),$$

$$Ap = -B\left(\frac{q}{p}\right)^{n-2}\frac{q^2}{p},$$

$$Ap^n + Bq^n = 0.$$

Таким образом, для определения A и B имеем систему уравнений

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ Ap^n + Bq^n = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$(1-B)p^n + Bq^n = 0,$$

$$B = \frac{p^n}{p^n - q^n},$$

$$A = 1 - B = 1 - \frac{p^n}{p^n - q^n} = \frac{q^n}{q^n - p^n}.$$

И следовательно, решением системы (2.3.5), если $q \neq p$, является

$$u_i = A + B\left(\frac{q}{p}\right)^i = \frac{q^n}{q^n - p^n} + \frac{p^n}{p^n - q^n}\left(\frac{q}{p}\right)^i =$$

$$= \frac{1}{q^n - p^n}\left(q^n - p^n\left(\frac{q}{p}\right)^i\right) = \frac{(q/p)^i - (q/p)^n}{1 - (q/p)^n},$$

$i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Так что при $q \neq p$ игрок G_m, имея накопленный капитал r, разорится с вероятностью

$$u_r = \frac{(q/p)^r - (q/p)^n}{1 - (q/p)^n}, \; r = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Заметим, что вероятность разорения игрока G_m не зависит от его начального капитала m, она определяется капиталом r, накопленным им к данному моменту.

Рассмотрим теперь случай, когда $q = p = 1/2$. Система (2.3.5) перепишется так:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_1 & = & 1/2 + u_2/2, \\ u_2 & = & u_1/2 + u_3/2, \\ & \vdots & \\ u_i & = & u_{i-1}/2 + u_{i+1}/2, \\ & \vdots & \\ u_{n-2} & = & u_{n-3}/2 + u_{n-1}/2, \\ u_{n-1} & = & u_{n-2}/2. \end{array}\right.$$

Решением системы

$$u_i = \frac{1}{2}u_{i-1} + \frac{1}{2}u_{i+1},\ i = 2, 3, \ldots, n-2,$$

является

$$u_i = i,\ i = 2, 3, \ldots, n-2,$$

в этом убеждаемся непосредственной проверкой. Легко видеть, что вместе с решением u_i решением последней системы будет и

$$A + Bu_i = A + Bi,\ i = 2, 3, \ldots, n-2.$$

Выберем теперь A и B так, чтобы это решение было также решением первого и последнего уравнений системы. Для первого уравнения имеем

$$A + B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(A + 2B).$$

Отсюда

$$A = 1.$$

Для последнего уравнения

$$u_{n-1} = \frac{1}{2}u_{n-2}$$

системы имеем

$$A + B(n-1) = \frac{1}{2}(A + B(n-2)).$$

Отсюда

$$B = -\frac{1}{n},$$

и, следовательно, решением системы (2.3.5), если $q = p = 1/2$ является

$$u_i = 1 - \frac{i}{n},\ i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Так что если игрок G_m, с вероятностью $p = 1/2$ увеличивая свой капитал на 1 в результате каждой партии (и с вероятностью 1/2 теряя единицу капитала), стал обладателем капитала r, то вероятность его разорения

$$u_r = 1 - \frac{r}{n},\ r = 1, 2, \ldots, n-1,$$

а вероятность неразорения

$$1 - u_r = \frac{r}{n},\ r = 1, 2, \ldots, n-1,$$

пропорциональна величине r накопленного капитала.

Замечание. Аналогичные выкладки показывают, что вероятность v_r разорения игрока G_M, если он накопил капитал r, равна

$$1 - u_r,\ r = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Вероятность разорения игрока, играющего с бесконечно богатым партнером. Пусть теперь игрок G_m играет с игроком G_∞, капитал которого неограничен (равен $+\infty$). Матрица переходных вероятностей марковской цепи $\{\xi_k\}$, описывающей размер капитала игрока G_m, имеет вид

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ q & 0 & p & 0 & \ldots \\ 0 & q & 0 & p & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{2.3.7}$$

состояние 0 ($C_0 = \{0\}$) цепи является поглощающим, состояния $1, 2, \ldots$ — несущественные.

Система уравнений (2.3.2) для вероятностей $u_i = \pi_i(C)$, $i \in T$, поглощения цепи классом C, когда матрица переходных вероятностей цепи имеет вид (2.3.7), класс $C_0 = \{0\}$, а $T = \{1, 2, \ldots\}$ запишется так:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_1 & = & q + pu_2, \\ u_i & = & qu_{i-1} + pu_{i+1},\ i = 2, 3, \ldots \end{array} \right. \tag{2.3.8}$$

Решение последней системы получаем так же, как и в случае игры с игроком G_M, капитал которого ограничен.

Сначала найдем решение системы

$$u_i = qu_{i-1} + pu_{i+1},\ i = 2, 3, \ldots$$

При $q \neq p$ ее решением является последовательность

$$u_i = A + B\left(\frac{q}{p}\right)^i,\ i = 2, 3, \ldots,$$

если $q = p = 1/2$, то решением является последовательность

$$u_i = A + B \cdot i,\ i = 2, 3, \ldots$$

При $q/p > 1$ и при $p = q = 1/2$ из условия ограниченности решения $u_i, i = 2, 3, \ldots$, получаем, что $B = 0$, и, следовательно, как при $q > p$, так и при $p = q = 1/2$ решение системы

$$u_i = qu_{i-1} + pu_{i+1},\ i = 2, 3, \ldots,$$

имеет вид

$$u_i = A,\ i = 2, 3, \ldots$$

Выберем A так, чтобы последовательность $u_i = A,\ i = 1, 2, 3, \ldots$ была решением и уравнения

$$u_1 = q + pu_2$$

системы (2.3.8). Для этого A должно удовлетворять уравнению

$$A = q + pA.$$

Отсюда $A = 1$ и, следовательно, решением системы (2.3.8) является

$$u_i = 1,\ i = 1, 2, \ldots,$$

т. е.

$$\pi(C_0) = u_i = 1,\ i = 1, 2, \ldots$$

Последнее означает, что если $q \geq p$, то игрок G_m, играя с игроком G_∞, капитал которого неограничен, неизбежно разорится (вероятность разорения равна 1) вне зависимости от размера его начального капитала.

Если вероятность p выигрыша игрока G_m больше вероятности q выигрыша игрока G_∞, т. е. $p > q$, то для получения выводов о вероятности $\pi_r(C_0)$ разорения игрока G_m, играющего с игроком G_∞, капитал которого неограничен, воспользуемся результатом, полученным в задаче о разорении игрока G_m, играющего с игроком G_M, капитал M которого ограничен.

В качестве вероятности разорения $\pi_r(C_0)$ игрока G_m, играющего с игроком G_∞, естественно рассмотреть предельное значение вероятности

$$u_r = u_r(n) = \frac{(q/p)^r - (q/p)^n}{1 - (q/p)^n}$$

разорения игрока G_m при $n = M + m \to \infty$ — при неограниченном росте капитала M игрока G_M, а именно

$$\pi_r(C_0) = (q/p)^r, \ r = 1, 2, \ldots$$

Из последнего равенства следует, что чем больше накопленный капитал r игрока G_m и чем больше вероятность p выигрыша игрока G_m в одной партии, тем меньше вероятность $\pi_r(C_0)$ его разорения, что вполне согласуется с нашей интуицией.

Если, к примеру, $p = 2/3$ и $r = 10$, то вероятность разорения игрока G_m, играющего с бесконечно богатым игроком, равна

$$\left(\frac{q}{p}\right)^r = \left(\frac{1/3}{2/3}\right)^{10} = \frac{1}{1024},$$

а вероятность того, что игрок не разорится, естественно, равна $1 - 1/1024$.

Интересно, что *если вероятность p выигрыша игрока G_m больше вероятности q выигрыша игрока G_∞, то игрок G_m с вероятностью $1 - (q/p)^r$ не только не разорится, но с ростом числа k сыгранных партий неограниченно увеличит свой капитал.*

В самом деле, пусть игрок G_m начинает игру с капиталом r.

Покажем, что для любого целого положительного L при $k \to \infty$

$$P\{\xi_k > L\} \to 1 - \pi_r(C_0) = 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^r.$$

Очевидно,

$$P\{\xi_k \le L\} = P\{\xi_k \in C_0\} + P\{1 \le \xi_k \le L\}. \tag{2.3.9}$$

По определению

$$\pi_r(C_0) = \sum_{s=1}^{\infty} \pi_r^{(s)}(C_0) = \sum_{s=1}^{k} \pi_r^{(s)}(C_0) + \sum_{s=k+1}^{\infty} \pi_r^{(s)}(C_0),$$

и т. к.

$$\sum_{s=1}^{k} \pi_r^{(s)}(C_0) = P\{\xi_k \in C_0\},$$

то

$$\pi_r(C_0) = P\{\xi_k \in C_0\} + \sum_{s=k+1}^{\infty} \pi_r^{(s)}(C_0).$$

Поэтому при $k \to \infty$

$$P\{\xi_k \in C_0\} \to \pi_r(C_0). \tag{2.3.10}$$

Оценим сверху $P\{1 \le \xi_k \le L\}$. Воспользовавшись соотношением (1.1.8), получим

$$P\{1 \le \xi_k \le L\} = \sum_{j=1}^{L} P\{\xi_k = j\} = \sum_{j=1}^{L} \sum_{i=1}^{\infty} p_i P_{ij}(k) = \sum_{j=1}^{L} P_{rj}(k)$$

(для $i \neq r$ значения $p_i = 0$, а $p_r = 1$ — цепь стартует из состояния r). И поскольку состояния $j = 1, 2, \ldots, L$ несущественные, а, следовательно, и невозвратные, то $P_{rj}(k) \to 0$ при $k \to \infty$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших k

$$P\{1 \le \xi_k \le L\} \le \varepsilon.$$

Из последнего неравенства и соотношений (2.3.9), (2.3.10) получаем, что для каждого L при $k \to \infty$

$$P\{\xi_k \ge L\} \to 1 - \pi_r(C_0) = 1 - (q/p)^r.$$

Если у игрока G_m, играющего с бесконечно богатым игроком G_∞, вероятность p выигрыша в одной партии равна, например, $2/3$, то он, начиная игру с капиталом $m = 10$, с вероятностью

$$1 - \left(\frac{1/3}{2/3}\right)^{10} = 1 - \frac{1}{1024}$$

неограниченно увеличит свой капитал (ну очень разбогатеет).

2.4 Примеры и задачи

Примеры

П р и м е р 2.4.1. *Пусть марковская цепь задана матрицей одношаговых переходных вероятностей*

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 4/5 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

Найти $\lim\limits_n P_{ij}(n)$ *для всех пар* (i,j), $i,j = 1,2,\ldots,5$, *если пределы существуют.*

Р е ш е н и е. Классы $C_1 = \{1,2,3\}$, $C_2 = \{4\}$ возвратные ненулевые непериодические, состояние $\{5\}$ — несущественное.

Для вычисления $\pi_5(C_1), \pi_5(C_2)$ воспользуемся тем, что

$$\pi_5(C_1) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k \in C_1} \pi_{5k}^{(\nu)}(C_1) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\pi_{51}^{(\nu)}(C_1) + \pi_{52}^{(\nu)}(C_1) + \pi_{53}^{(\nu)}(C_1)),$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \pi_{51}^{(\nu)}(C_1) = \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \ldots = \frac{1}{4}.$$

(см. обозначения в доказательстве теоремы 2.1.6). Аналогично

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \pi_{52}^{(\nu)}(C_1) = \frac{1}{4}, \ \sum_{\nu=1}^{\infty} \pi_{53}^{(\nu)}(C_1) = \frac{1}{4},$$

так что

$$\pi_5(C_1) = 3/4.$$

Для класса C_2

$$\pi_5(C_2) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \pi_{54}^{(\nu)}(C_2) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \ldots = \frac{1}{4}.$$

Далее предельное поведение $P_{ij}(n)$ исследуется аналогично тому, как это делалось в примере 2.1.3.

Задачи

Задача 2.1. 1) Доказать, что у конечной неприводимой непериодической марковской цепи существует собственное стационарное распределение.

2) Доказать, что у конечной неприводимой непериодической марковской цепи существуют пределы

$$\lim_n P_{ij}(n),$$

причем их значения отличны от нуля.

Указание к п. 1. Описанная цепь ненулевая, а, следовательно, возвратная, поэтому существует эргодическое распределение. Далее воспользоваться теоремой 2.1.4.

Задача 2.2. В двух урнах находится 8 шаров — в первой 4 белых, во второй 4 черных.

Из каждой урны наудачу выбирают по шару и перекладывают из одной урны в другую. Пусть ξ_n — число белых шаров в первой урне после n-го перекладывания. Предположим, что шары можно перекладывать неограниченное число раз ($n \to \infty$).

Найти предельное распределение числа белых шаров в первой урне (если такое распределение существует).

Указание. Убедиться, что последовательность $\{\xi_n\}$ является марковской цепью.

Предельные значения $\lim_n P\{\xi_n = k\}$ совпадают с эргодическим распределением $\{\pi_k\}$:

$$\pi_0 = \frac{1}{70},\ \pi_1 = \frac{16}{70},\ \pi_2 = \frac{36}{70},\ \pi_3 = \frac{16}{70},\ \pi_4 = \frac{1}{70}.$$

Задача 2.3. В двух урнах находится 6 шаров (по 3 в каждой) среди них 3 белых и 3 черных.

Из каждой урны наудачу выбирают по шару и перекладывают из одной урны в другую. Пусть ξ_n — число белых шаров в первой урне после n-го перекладывания. Предположим, что шары можно перекладывать неограниченное число раз ($n \to \infty$).

Найти предельное распределение ξ_n при $n \to \infty$, т. е.

$$\lim_n P\{\xi_n = k\},\ k = 0, 1, 2, 3,$$

(если такое распределение существует).

Указание. Убедиться, что последовательность $\{\xi_n\}$ является марковской цепью. Значения

$$\lim_n P\{\xi_n = k\} = \pi_k,\ k = 0, 1, 2, 3.$$

Матрица переходных вероятностей цепи

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Эргодическое распределение цепи

$$\pi_0 = \frac{1}{20},\ \pi_1 = \frac{9}{20},\ \pi_2 = \frac{9}{20},\ \pi_3 = \frac{1}{20}.$$

Задача 2.4. Монету, вероятность выпадения герба которой равна p $(0 < p < 1)$, подбрасывают независимым образом неограниченное число раз. Пусть ξ_k — число выпавших гербов при k-м подбрасывании монеты, $k = 1, 2, \ldots$ Рассмотрим последовательность случайных величин

$$\eta_{n+1} = (\eta_n + 1) I_{\{1\}}(\xi_n),\ \eta_0 = 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Вычислить

$$\lim_n P\{\eta_n = k\},\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

если эти пределы существуют.

Задача 2.5. Симметричную игральную кость подбрасывают независимым образом неограниченное число раз. Пусть ξ_k — число выпавших шестерок при k-м подбрасывании кости, $k = 1, 2, \ldots$ Рассмотрим последовательность случайных величин

$$\eta_{n+1} = (\eta_n + 1) I_{\{6\}}(\xi_n),\ \eta_0 = 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Вычислить

$$\lim_n P\{\eta_n = k\},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

если эти пределы существуют.

Задача 2.6. Марковская цепь с фазовым пространством $X = \{1, 2, 3\}$ описывается матрицей переходных вероятностей:

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}.$$

Найти $\lim_n P_{11}(n)$, если он существует.

Ответ: $\lim_n P_{11}(n) = 1/10$.

Задача 2.7. Марковская цепь с фазовым пространством $X = \{1, 2, 3\}$ описывается матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Существует ли предел $\lim\limits_n P_{22}(n)$? Если существует — найти его.

Ответ: $\lim\limits_n P_{22}(n) = 1/2$.

Задача 2.8. Марковская цепь с фазовым пространством $X = \{1, 2, 3\}$ описывается матрицей переходных вероятностей

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}.$$

Задано распределение цепи в момент времени $t = 0$ (начальное распределение):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3/8 & 1/4 & 3/8 \end{pmatrix}.$$

Вычислить

$$\lim_n P\{\xi_n = k\}, \ k = 1, 2, 3.$$

Указание. Воспользуйтесь следствием из эргодической теоремы 2.1.2 и теоремой 2.1.4 (о стационарном и эргодическом распределении).

Ответ:
$\lim\limits_n P\{\xi_n = 1\} = 1/7$, $\lim\limits_n P\{\xi_n = 2\} = 3/7$, $\lim\limits_n P\{\xi_n = 3\} = 3/7$. Значения пределов не зависят от начального распределения.

Задача 2.9. Рассматривается марковская цепь с фазовым пространством $X = \{1, 2, 3, 4\}$, описываемая матрицей переходных вероятностей

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычислить $\lim\limits_n P_{ij}(n)$, $i, j = 1, 2, 3, 4$, если эти пределы существуют.

Задача 2.10. Рассматривается марковская цепь с фазовым пространством $\{1, 2, 3\}$, описываемая матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$\begin{bmatrix} 4/5 & 1/5 & 0 \\ 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 4/5 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

1° Существует ли $\lim\limits_{n} P_{11}(n)$?

2° Если существует $\lim\limits_{n} P_{11}(n)$, найти его.

Ответ: $\lim\limits_{n} P_{11}(n) = 12/17$.

Задача 2.11. Рассматривается марковская цепь с фазовым пространством $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, описываемая матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

Классифицировать состояния марковской цепи. Для возвратных состояний найти математическое ожидание времени первого возвращения в состояние.

Ответ: $M\tau_1 = 17$, $M\tau_2 = 17/2$, $M\tau_3 = 17/2$, $M\tau_4 = 17/4$, $M\tau_5 = 17/8$.

Задача 2.12. Рассматривается марковская цепь с фазовым пространством $\{1, 2, 3\}$, описываемая матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$\begin{bmatrix} 4/5 & 1/5 & 0 \\ 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 4/5 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

Задано начальное распределение цепи (распределение в момент времени 0):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/10 & 4/5 & 1/10 \end{pmatrix}.$$

Вычислить $\lim\limits_{n} P\{\xi_n = k\}, \ k = 1, 2, 3$.

Задача 2.13. Рассматривается марковская цепь с фазовым пространством $\{1,2,3,4\}$, описываемая матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$\begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

1° Можно ли утверждать, что $\lim\limits_n P_{32}(n)$ существует?

2° Если $\lim\limits_n P_{32}(n)$ существует, найти его.

3° Вычислить математическое ожидание времени первого возвращения в состояние 2.

Задача 2.14. Классифицировать состояния цепи Маркова с матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

и вычислить $\lim\limits_n P_{ij}(n)$, если эти пределы существуют.

Для возвратных состояний найти математическое ожидание времени первого возвращения.

Задача 2.15. Найти предельное распределение марковской цепи, заданной матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 4/5 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Указание. См. пример 2.1.3.

Задача 2.16. Рассматривается марковская цепь $\{\xi_n\}$ с фазовым пространством $X = \{1,2,3\}$ и матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}.$$

Задано распределение цепи в момент времени $t = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Вычислить $\lim\limits_n P\{\xi_n = k\}$, $k = 1, 2, 3$.

Ответ: $\lim\limits_n P\{\xi_n = 1\} = 1/10$, $\lim\limits_n P\{\xi_n = 2\} = 3/10$, $\lim\limits_n P\{\xi_n = 3\} = 6/10$.

Задача 2.17. Классифицировать состояния цепи Маркова с матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/8 & 1/2 & 1/8 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Найти предельное распределение марковской цепи.

Задача 2.18. Найти предельные значения $P_{ij}(n)$ для марковских цепей, заданных матрицами одношаговых переходных вероятностей:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Задача 2.19. Найти предельные значения $P_{ij}(n)$ для марковской цепи, заданной матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Задача 2.20. Пусть марковская цепь задана матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Найти $\lim\limits_n P_{ij}(n)$ для всех пар $(i,\ j)$.

Задача 2.21. Для марковской цепи с матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычислить $\lim\limits_n P_{ij}(n)$, $i, j = 1, 2, \ldots 6$, если эти пределы существуют.

Ответ. Классы эквивалентности — $C_1 = \{1, 2, 3\}$, $C_2 = \{6\}$; состояния $\{4\}$ и $\{5\}$ — несущественные.

$$\lim_n P_{4i}(n) = \pi_4(C_1)\pi_i,\ \ i = 1, 2, 3;$$

$$\lim_n P_{5i}(n) = \pi_5(C_1)\pi_i,\ \ i = 1, 2, 3;$$

$$\lim_n P_{56}(n) = \pi_5(C_2)\pi_6;\ \ \lim_n P_{46}(n) = \pi_4(C_2)\pi_6.$$

Далее см. пример 2.4.1.

Задача 2.22. Для марковской цепи с матрицей одношаговых переходных вероятностей

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/10 \\ 1/10 & 1/5 & 0 & 1/2 & 1/10 & 1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

вычислить $\lim\limits_n P_{ij}(n)$, $i, j = 1, 2, \ldots 6$, если эти пределы существуют.

Задача 2.23. Для марковских цепей $\{\zeta_n\}, \{\theta_n\}$, описанных в задаче 1.11, найти: 1) $\lim\limits_n P_{ij}(n),\ i,j=1,2,\dots 6$ (если эти пределы существуют); 2) предельные распределения этих марковских цепей (если они существуют).

Вычислить математические ожидания времени первого возвращения в состояние.

О т в е т.

1) Заметим, что состояния $2,3,\dots,6$ несущественные, а состояние 1 является поглощающим экраном.

Для $i \neq 1$

$$\sum_{j=1}^{6} P_{ij}(n) = 1. \tag{2.4.1}$$

Поскольку при $j \neq 1$ значения $\lim\limits_n P_{ij}(n) = 0$ — состояния $i,j = 2,3,\dots,6$, несущественные, то переходя в равенстве (2.4.1) к пределу при $n \to \infty$, получим $\lim\limits_n P_{i1}(n) = 1$.

2) Марковская цепь $\{\theta_n\}$ неприводимая, непериодическая, возвратная, ненулевая. Поэтому существует эргодическое распределение

$$\lim_n P_{ij}(n) = \pi_j,\ j=1,2,\dots 6$$

и оно совпадает с собственным стационарным распределением, т. е. удовлетворяет системе

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{P}'\pi &=& \pi, \\ \sum_{j=1}^{6}\pi_j &=& 1. \end{array}\right.$$

Подробнее эта система перепишется так:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccccc}
\pi_1 &+& \pi_2 &+& \pi_3 &+& \pi_4 &+& \pi_5 &+& \pi_6 &=& 6\pi_1,\\
\pi_1 &+& \pi_2 &+& \pi_3 &+& \pi_4 &+& \pi_5 &+& \pi_6 &=& 6\pi_2,\\
4\pi_1 &+& \pi_2 &+& \pi_3 &+& \pi_4 &+& \pi_5 &+& \pi_6 &=& 6\pi_3,\\
 && 3\pi_2 &+& \pi_3 &+& \pi_4 &+& \pi_5 &+& \pi_6 &=& 6\pi_4,\\
 && && 2\pi_3 &+& \pi_4 &+& \pi_5 &+& \pi_6 &=& 6\pi_5,\\
 && && && \pi_4 &+& \pi_5 &+& \pi_6 &=& 6\pi_6,\\
\pi_1 &+& \pi_2 &+& \pi_3 &+& \pi_4 &+& \pi_5 &+& \pi_6 &=& 1.
\end{array}\right.$$

Последовательно вычитая из первого и второго уравнений последнее, получаем

$$\pi_1 = \frac{1}{6},\ \pi_2 = \frac{1}{6}.$$

Вычитая из третьего уравнения последнее, имеем

$$3\pi_1 = 6\pi_3 - 1,$$

отсюда $\pi_3 = 1/4$. И так далее, получаем

$$\pi_4 = \frac{7}{36},\ \pi_5 = \frac{11}{72},\ \pi_6 = \frac{5}{72}.$$

Задача 2.24. Исследовать предельное поведение марковских цепей описанных в задаче 1.11.

Задача 2.25. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных целочисленных случайных величин, каждая с распределением

$$P\{\xi_k = j\} = a_j,\ j = 0, 1, 2, \ldots$$

Рассмотрим последовательности случайных величин

1) $\zeta_{n+1} = (\zeta_n - 1)^+ + \xi_n$, $\zeta_1 = \xi_1$, $n = 1, 2, \ldots$;

2) $\theta_{n+1} = (\theta_n - 3)^+ + \xi_n$, $\theta_1 = \xi_1$, $n = 1, 2, \ldots$;

3) $\varphi_{n+1} = (\varphi_n - s)^+ + \xi_n$, $\varphi_1 = \xi_1$, $n = 1, 2, \ldots$, s — целое положительное.

Показать, что последовательности $\{\zeta_n\}$, $\{\theta_n\}$, $\{\varphi_n\}$ образуют марковские цепи. Найти их матрицы переходных вероятностей.

Пусть

1) ξ_k имеют распределение

$$P\{\xi_k = j\} = 1/m,\ j = 1, 2, \ldots, m;$$

2) ξ_k имеют распределение

$$P\{\xi_k = j\} = C_5^j p^j (1-p)^{5-j},\ j = 0, 1, \ldots, 5.$$

Исследовать предельное поведение цепей $\{\zeta_n\}$, $\{\theta_n\}$, $\{\varphi_n\}$.

При каких значениях параметров m, p цепи имеют собственное эргодическое распределение? Что можно сказать о предельном поведении цепи, если цепь не имеет собственного эргодического распределения?

Задача 2.26. Для марковской цепи из примера 1.3.5 найти: 1) $\lim\limits_n P_{ij}(n)$, $i, j = 1, 2, 3, 4$ (если эти пределы существуют); 2) предельные распределения марковской цепи. Вычислить математические ожидания времени первого возвращения в состояние.

Глава 3

Марковские цепи с непрерывным временем

3.1 Основные понятия и определения

О п р е д е л е н и е. Семейство случайных величин

$$\{\xi(t), t \in [0, \infty)\}$$

со значениями в $\mathbb{R}^1$, зависящее от параметра $t \in [0, \infty)$, будем называть *случайным процессом* со значениями в $\mathbb{R}^1$, заданным на множестве $[0, \infty)$.

При каждом фиксированном t случайная величина $\xi(t)$ — функция на Ω вероятностного пространства $\{\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P}\}$:

$$\xi(t) = \xi(t, \omega),$$

поэтому случайный процесс

$$\xi(t) = \xi(t, \omega), \ (t, \omega) \in [0, \infty) \times \Omega,$$

является функцией двух переменных t и ω.

Для каждого фиксированного $\omega \in \Omega$ функцию

$$\xi(t) = \xi(t, \omega), \ t \in [0, \infty),$$

со значениями в $\mathbb{R}^1$, заданную на $[0, \infty)$, будем называть *траекторией* случайного процесса $\{\xi(t), t \in [0, \infty)\}$.

Определение. Случайный процесс $\{\xi(t), t \in [0, +\infty)\}$ со значениями в $\{0, 1, \ldots\}$ будем называть *марковской цепью с непрерывным временем*, если для него имеет место *марковское свойство*: для любых $t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1}$ и $j_0, j_1, \ldots, j_{n-1}, i, j$

$$P\{\xi(t_{n+1}) = j \,|\, \xi(t_n) = i, \xi(t_{n-1}) = j_{n-1}, \ldots, \xi(t_1) = j_1, \xi(t_0) = j_0\} =$$

$$= P\{\xi(t_{n+1}) = j \,|\, \xi(t_n) = i\}.$$

Далее множество $X = \{0, 1, \ldots\}$ значений цепи будем называть её *фазовым пространством*.

Определение. Условную вероятность

$$P\{\xi(t) = j \,|\, \xi(s) = i\} = P_{ij}(s, t),$$

$s, t \in [0; \infty),\ s < t,\ i, j = 0, 1, 2, \ldots,$ называют *переходной вероятностью* (*вероятностью перехода*) марковской цепи.

Вероятность

$$P_k(t) = P\{\xi(t) = k\},\ t > 0,$$

называют *вероятностью пребывания* в состоянии k, $k = 0, 1, \ldots$

Определение. Марковскую цепь будем называть *марковской цепью со стационарными переходными вероятностями* — *стационарной марковской цепью*, если ее переходные вероятности

$$P\{\xi(t+s) = j \,|\, \xi(s) = i\} = P_{ij}(s, s+t),\ i, j = 0, 1, 2, \ldots;\ s, t > 0$$

не зависят от s. При этом переходные вероятности называют *стационарными* и обозначают $P_{ij}(t)$:

$$P_{ij}(s, s+t) = P_{ij}(t),\ i, j = 0, 1, 2, \ldots;\ s, t > 0.$$

Мы будем рассматривать марковские цепи со стационарными переходными вероятностями.

Определение. *Матрицей переходных вероятностей* марковской цепи $\{\xi(t), t \in [0, \infty)\}$ будем называть матрицу, элементами которой являются переходные вероятности

$$P_{ij}(t) = P\{\xi(t+s) = j \,|\, \xi(s) = i\},\ i, j = 0, 1, 2, \ldots$$

Непосредственно из определения матрицы переходных вероятностей следуют такие её свойства:

$$1^\circ \ \ P_{ij}(t) \geq 0, \ \sum_j P_{ij}(t) = 1, \ t \geq 0; \ i = 0, 1, 2, \ldots$$

— каждая строка матрицы переходных вероятностей задает на фазовом пространстве $X = \{0, 1, 2, \ldots\}$ семейство вероятностных распределений, зависящих от параметра t.

2° Переходные вероятности $P_{ij}(t)$ удовлетворяют уравнению Колмогорова-Чепмена:

$$P_{ij}(s+t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(s) P_{kj}(t), \ s, t > 0, \ i, j = 0, 1, 2, \ldots,$$

или в матричном виде,

$$\mathbb{P}(s+t) = \mathbb{P}(s)\mathbb{P}(t),$$

где $\mathbb{P}(t) = [P_{ij}(t)]$, $t \geq 0$.

Уравнение Колмогорова-Чепмена является непосредственным следствием марковского свойства.

Дале мы будем требовать, чтобы переходные вероятности $P_{ij}(h)$, $i, j = 0, 1, 2, \ldots$, обладали *свойством непрерывности* в точке 0:

$$\lim_{h \to 0+0} P_{ij}(h) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = i, \\ 0, & \text{если } j \neq i \end{cases}$$

(в силу стационарности цепи непрерывность переходной вероятности в точке 0 влечет непрерывность в каждой точке $t > 0$).

Непрерывность переходных вероятностей фактически обозначает непрерывность стационарной марковской цепи — если цепь в момент t находится в состоянии i, то за малое время h с вероятностью близкой к 1 цепь и останется в состоянии i (за малое время с вероятностью близкой к 1 состояние цепи не изменится).

Переходную матрицу, элементы $P_{ij}(h)$, $i, j = 0, 1, 2, \ldots$, которой удовлетворяют свойству непрерывности, будем называть *стандартной матрицей.*

Теорема 3.1.1 (уравнение Колмогорова-Чепмена). *Переходные вероятности стационарной марковской цепи удовлетворяют уравнению Колмогорова-Чепмена:*

$$P_{ij}(s+t) = \sum_k P_{ik}(s) P_{kj}(t), \ s, t > 0, \ i, j = 0, 1, \ldots, \tag{3.1.1}$$

или в матричном виде:

$$\mathbb{P}(s+t) = \mathbb{P}(s)\mathbb{P}(t).$$

Доказательство. Очевидно,

$$\{\xi(s+t) = j, \xi(0) = i\} = \bigcup_k \{\xi(0) = i, \xi(s) = k, \xi(t+s) = j\},$$

причем события в правой части несовместны. Отсюда

$$P\{\xi(s+t) = j \,|\, \xi(0) = i\} = \sum_k P\{\xi(s+t) = j, \xi(s) = k \,|\, \xi(0) = i\} =$$

$$= \sum_k \frac{P\{\xi(s+t) = j, \xi(s) = k, \xi(0) = i\}}{P\{\xi(0) = i\}} =$$

$$= \sum_k \frac{P\{\xi(s+t) = j \,|\, \xi(s) = k, \xi(0) = i\} P\{\xi(s) = k, \xi(0) = i\}}{P\{\xi(0) = i\}} =$$

$$= \sum_k \frac{P\{\xi(s+t) = j \,|\, \xi(s) = k\} P\{\xi(s) = k, \xi(0) = i\}}{P\{\xi(0) = i\}} =$$

$$= \sum_k P\{\xi(s+t) = j \,|\, \xi(s) = k\} P\{\xi(s) = k \,|\, \xi(0) = i\} =$$

$$= \sum_k P_{ik}(s) P_{kj}(t).$$

Замечание. Равенство

$$\mathbb{P}(s+t) = \mathbb{P}(s)\mathbb{P}(t), \; s > 0, t > 0,$$

обозначает, что семейство операторов $\mathbb{P}(t)$, $t > 0$, обладает полугрупповым свойством.

Следствие 1. Для любых $t_1, t_2, \ldots, t_n$

$$P_{ij}(t_1 + t_2 + \ldots + t_n) = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}} P_{ik_1}(t_1) P_{k_1 k_2}(t_2) \ldots P_{k_{n-1} j}(t_n). \tag{3.1.2}$$

Доказательство.

$$P_{ij}(t_1 + t_2 + \ldots + t_n) = P_{ij}(t_1 + (t_2 + \ldots + t_n)) =$$

$$= \sum_{k_1} P_{ik_1}(t_1) P_{k_1 j}(t_2 + t_3 + \ldots + t_n) =$$

$$= \sum_{k_1} P_{ik_1}(t_1) \sum_{k_2} P_{k_1 k_2}(t_2) P_{k_2 j}(t_3 + t_4 + \ldots + t_n) = \ldots$$

$$\ldots = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}} P_{ik_1}(t_1) P_{k_1 k_2}(t_2) \ldots P_{k_{n-1} j}(t_n).$$

Следствие 2.

$$P_{ij}(t_1 + t_2 + \ldots + t_n) \geq P_{ik_1}(t_1) P_{k_1 k_2}(t_2) \ldots P_{k_{n-1} j}(t_n).$$

Следствие 3.

$$P_{ii}(t) \geq (P_{ii}(t/n))^n.$$

Достаточно в следствии 2 положить $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = t/n$, $j = i, k_1 = i, k_2 = i, \ldots, k_{n-1} = i$.

Задание марковской цепи. Случайный процесс $\{\xi(t), t \in [0, +\infty)\}$, в частности, марковская цепь с непрерывным временем $\{\xi(t), t \in [0, +\infty)\}$ считается заданной, если заданы ее конечномерные распределения, а именно, для любых $0 = t_0, t_1, \ldots t_n$ и $i_0, i_1, \ldots, i_n$ заданы

$$P_{t_0 t_1 \ldots t_n}(i_0, i_1, \ldots i_n) = P\{\xi(t_0) = i_0, \xi(t_1) = i_1, \ldots, \xi(t_n) = i_n\}.$$

Как и для цепей Маркова с дискретным временем, *марковская цепь с непрерывным временем задается своим начальным распределением (распределением при* $t = 0$) *и матрицей переходных вероятностей* $[P_{ij}(t)]$, $t > 0$.

Убедимся в этом. Пусть $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$. Воспользовавшись формулой умножения и марковским свойством, имеем

$$P\{\xi(t_0) = i_0, \xi(t_1) = i_1, \ldots, \xi(t_{n-1}) = i_{n-1}, \xi(t_n) = i_n\} =$$

$$= P\{\xi(t_n) = i_n \,|\, \xi(t_{n-1}) = i_{n-1}, \ldots, \xi(t_0) = i_0\} \times$$

$$\times P\{\xi(t_{n-1}) = i_{n-1}, \xi(t_{n-2}) = i_{n-2}, \ldots, \xi(t_0) = i_0\} =$$

$$= P\{\xi(t_n) = i_n \,|\, \xi(t_{n-1}) = i_{n-1}\} \times$$

$$\times P\{\xi(t_{n-1}) = i_{n-1}, \xi(t_{n-2}) = i_{n-2}, \ldots, \xi(t_0) = i_0\} =$$

$$= P_{i_{n-1}\, i_n}(t_n - t_{n-1}) \times$$

$$\times P\{\xi(t_{n-1}) = i_{n-1}, \xi(t_{n-2}) = i_{n-2}, \ldots, \xi(t_0) = i_0\} =$$

$$= P_{i_{n-1}\,i_n}(t_n - t_{n-1}) \cdot P_{i_{n-2}\,i_{n-1}}(t_{n-1} - t_{n-2}) \times \ldots$$
$$\ldots \times P_{i_0\,i_1}(t_1 - t_0) \cdot P\{\xi(t_0) = i_0\}.$$

Равенство

$$P\{\xi(t_0) = i_0, \xi(t_1) = i_1, \ldots, \xi(t_{n-1}) = i_{n-1}, \xi(t_n) = i_n\} =$$
$$= P_{i_{n-1}\,i_n}(t_n - t_{n-1}) \cdot P_{i_{n-2}\,i_{n-1}}(t_{n-1} - t_{n-2}) \times \ldots$$
$$\ldots \times P_{i_0\,i_1}(t_1 - t_0) \cdot P\{\xi(t_0) = i_0\}. \qquad (3.1.3)$$

и обозначает, что цепь задается ее начальным распределением $P\{\xi(t_0) = i_0\}$ и матрицей переходных вероятностей $[P_{ij}(t)]$.

Во многих ситуациях поведение матрицы переходных вероятностей $[P_{ij}(h)]$ в окрестности нуля определяет поведение вероятностей пребывания $P_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, при всех $t > 0$. Точнее, можно выписать систему дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют $P_n(t)$. Поэтому общий подход в задании марковских цепей с непрерывным временем состоит в задании (постулировании) вида матрицы переходных вероятностей $[P_{ij}(h)]$ в окрестности нуля.

При изучении цепей Маркова с непрерывным временем (как и для цепей с дискретным временем) важной задачей является изучение асимптотического поведения распределения $\xi(t)$, т. е. поведения вероятностей пребывания

$$P\{\xi(t) = n\} = P_n(t),\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

при $t \to \infty$.

3.2 Процесс чистого рождения

Пусть $\xi(t)$ — размер популяции леммингов, зайцев, лис, волков, ... на данной территории. При благоприятных условиях — достаточное количество пищи, отсутствие смертности, отсутствие миграции размер популяции будет неограниченно расти. (Реально неограниченный рост невозможен хотя бы потому, что при большом размере популяции пищи для всех не хватит.) Математической моделью численности популяции в описанной ситуации является так называемый процесс чистого рождения.

Определение. *Процессом чистого рождения* будем называть стационарную марковскую цепь с непрерывным временем, переходные вероятности которой в окрестности нуля удовлетворяют постулатам:

1° $P_{k,k+1}(h) = \lambda_k h + o(h),\ h \to 0+0,\ k = 0, 1, \ldots;$

2° $P_{k,k}(h) = 1 - \lambda_k h + o(h),\ h \to 0+0,\ k = 0, 1, \ldots;$

3° $P_{k,j}(0) = \delta_{k,j},\ k, j = 0, 1, \ldots$

Из 1° – 2° следует, что для $j \neq k, k+1$

$$P_{k,j}(h) = o(h),\ h \to 0+0$$

— вероятности перехода в несоседние состояния есть величины порядка $o(h)$ при $h \to 0+0$.

Параметры $\lambda_k, k = 0, 1, 2, \ldots,$ — неотрицательные числа, $o(h)$ могут, вообще говоря, зависеть от k.

Числа $\lambda_k,\ k = 0, 1, \ldots,$ называют *инфинитезимальными характеристиками или инфинитезимальными интенсивностями роста* процесса чистого рождения.

Матрицу

$$\begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

называют *инфинитезимальной матрицей* процесса чистого рождения.

Заметим, что в точке нуль существуют производные переходных вероятностей процесса чистого рождения и они равны интенсивностям роста:

$$P'_{k,\,k+1}(0) = \lambda_k,$$

$$P'_{k,\,k}(0) = -\lambda_k.$$

Первый постулат процесса чистого рождения обозначает, что при малых h вероятность покинуть состояние k (перейти в состояние $k+1$) растет пропорционально времени h (как $\lambda_k h$), второй постулат обозначает, что при малых h вероятность остаться в состоянии k убывает (как $1 - \lambda_k h$).

Из определения процесса чистого рождения следует, что переходные вероятности обладают свойством непрерывности.

Постулируя такой вид переходных вероятностей цепи при малых h (локально), мы обеспечиваем монотонность траекторий цепи — за малое время (локально) цепь из данного состояния k может перейти только в соседнее состояние $k+1$ (с вероятностью $\lambda_k h + o(h)$), либо остаться на месте (в состоянии k), естественно, с вероятностью $1 - \lambda_k h + o(h)$.

Заданные локально (при малых h) переходные вероятности $P_{ij}(h)$ определяют вероятности пребывания $P_k(t) = P\{\xi(t) = k\}$ цепи $\xi(t)$ для всех $t > 0$.

Теорема 3.2.1. *Вероятности пребывания*

$$P_k(t) = P\{\xi(t) = k\},\ k = 0, 1, 2, \dots,$$

процесса $\{\xi(t), t \in [0; \infty), \xi(0) = 0\}$ *чистого рождения, выходящего из* 0, *удовлетворяют системе дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t), \\ P_{k+1}'(t) = -\lambda_{k+1} P_{k+1}(t) + \lambda_k P_k(t),\ k = 0, 1, \dots, \end{cases}$$

с начальными условиями

$$P_0(0) = 1,\ P_k(0) = 0,\ k = 1, 2, \dots$$

Доказательство. Сначала составим уравнение для вероятности $P_0(t)$ пребывания цепи в точке 0.

Для процесса чистого рождения

$$P_0(t+h) = P\{\xi(t+h) = 0\} = P\{\xi(t+h) = 0, \xi(t) = 0\} =$$

$$= P\{\xi(t+h) = 0 \,|\, \xi(t) = 0\} P\{\xi(t) = 0\} = P_{00}(h) P_0(t) =$$
$$= (1 - \lambda_0 h + o(h)) P_0(t),$$

отсюда

$$P_0(t+h) = P_0(t) - \lambda_0 h P_0(t) + P_0(t) o(h)$$

или

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\lambda_0 P_0(t) + P_0(t) \frac{o(h)}{h}.$$

Переходя к пределу в правой и левой частях при $h \to 0 + 0$ (предел правой части существует), получаем

$$P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t). \qquad (3.2.1)$$

Далее получим уравнения, которым удовлетворяют вероятности пребывания $P_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$ Имеем

$$P_{k+1}(t+h) = P\{\xi(t+h) = k+1\} =$$

$$= P\left(\{\xi(t+h) = k+1\} \cap \left(\bigcup_{i=0}^{k+1} \{\xi(t) = i\}\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k+1} P\{\xi(t+h) = k+1, \xi(t) = i\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k+1} P\{\xi(t+h) = k+1 \,|\, \xi(t) = i\} P\{\xi(t) = i\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k+1} P_{i,k+1}(h) P_i(t) =$$

$$= P_{k+1,\,k+1}(h) P_{k+1}(t) + P_{k,k+1}(h) P_k(t) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} P_i(t) P_{i,k+1}(h) =$$

$$= P_{k+1}(t)(1 - \lambda_{k+1} h + o(h)) + P_k(t)(\lambda_k h + o(h)) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} P_i(t)\, o(h) =$$

$$= P_{k+1}(t) - \lambda_{k+1} h P_{k+1}(t) + \lambda_k h P_k(t) + o(h).$$

Отсюда

$$P_{k+1}(t+h) - P_{k+1}(t) = -\lambda_{k+1} h P_{k+1}(t) + \lambda_k h P_k(t) + o(h), \;\; h \to 0+0,$$

где $o(h)/h \to 0$ при $h \to 0$ равномерно по t. Разделив левую и правую части на h и перейдя к пределу при $h \to 0+0$, для вероятностей пребывания $P_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots$, получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda P_0(t), \\ P_{k+1}'(t) = -\lambda_{k+1} P_{k+1}(t) + \lambda_k P_k(t), \;\; k = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{3.2.2}$$

с начальными условиями

$$P_0(0) = 1,\ P_k(0) = 0,\ k = 1, 2, \ldots$$

Для вероятностей пребывания $P_k(t)$ можно доказать существование и левосторонних производных.

Из первого уравнения системы (3.2.2)

$$P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t),$$

с учетом начального условия $P_0(0) = 1$ получаем

$$P_0(t) = e^{-\lambda_0 t}.$$

При конкретных значениях $\lambda_k \geq 0$ можно последовательно проинтегрировать уравнения (3.2.2).

Определение. *Временем пребывания* марковской цепи $\{\xi(t), t \in [0; \infty), \xi(0) = 0\}$, стартующей из состояния 0, в состоянии 0 будем называть случайную величину

$$\tau_0 = \inf\{t : \xi(t) \neq 0,\, \xi(0) = 0\}.$$

Цепь до момента τ_0 пребывает в состоянии 0, а в момент τ_0 "уходит" из состояния 0.

Следствие. *Время пребывания τ_0 в состоянии 0 процесса чистого рождения, выходящего из 0, распределено показательно с параметром λ_0:*

$$P\{\tau_0 < t\} = 1 - e^{-\lambda_0 t},\ t > 0.$$

Действительно, при $t > 0$

$$P\{\tau_0 < t\} = 1 - P\{\tau_0 \geq t\} = 1 - P\{\xi(t) = 0\} = 1 - P_0(t) = 1 - e^{-\lambda_0 t}.$$

Пуассоновский процесс. Одним из частных случаев процесса чистого рождения является пуассоновский процесс.

Определение 1. *Пуассоновским процессом с параметром* λ $(\lambda > 0)$, *стартующим из нуля,* называется процесс чистого рождения $\{\xi(t),\, t \in [0; +\infty), \xi(0) = 0\}$, у которого интенсивности роста

$$\lambda_k = \lambda,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Теорема 3.2.2. *У пуассоновского процесса*

$$\{\xi(t), t \in [0,\infty), \xi(0) = 0\}$$

с параметром λ, стартующего из нуля, вероятности пребывания

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},\ k = 0, 1, \ldots$$

Доказательство. Согласно теореме 3.2.1, вероятности пребывания $P_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, процесса рождения и гибели, у которого интенсивности роста $\lambda_k = \lambda$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda P_0(t), \\ P_{k+1}'(t) = -\lambda P_{k+1}(t) + \lambda P_k(t),\ k = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

при начальных условиях

$$P_0(0) = 1,\ P_k(0) = 0,\ k = 1, 2, \ldots$$

Для решения последней системы уравнений введем функции $Q_k(t)$:

$$P_k(t) = e^{-\lambda t} Q_k(t),\ k = 0, 1, \ldots, \tag{3.2.3}$$

и перепишем систему в терминах $Q_k(t)$. Имеем:

$$\left(e^{-\lambda t} Q_{k+1}(t)\right)' = -\lambda e^{-\lambda t} Q_{k+1}(t) + \lambda e^{-\lambda t} Q_k(t),$$

$$-\lambda e^{-\lambda t} Q_{k+1}(t) + e^{-\lambda t} Q_{k+1}'(t) = -\lambda e^{-\lambda t} Q_{k+1}(t) + \lambda e^{-\lambda t} Q_k(t),$$

или

$$Q_{k+1}'(t) = \lambda Q_k(t),\ k = 0, 1, \ldots \tag{3.2.4}$$

Заметим, что поскольку

$$P_0(0) = 1,\ P_k(0) = 0,\ k = 1, 2, \ldots,$$

то из равенств (3.2.3) для $Q_k(t)$ получаем начальные условия

$$Q_0(0) = 1,\ Q_k(0) = 0,\ k = 1, 2, \ldots$$

Решим систему дифференциальных уравнений (3.2.4) при начальных условиях

$$Q_0(0) = 1,\ Q_k(0) = 0,\ k = 1, 2, \ldots$$

Ранее мы получили, что

$$P_0(t) = e^{-\lambda t},$$

поэтому из (3.2.3) при $k = 0$ имеем

$$Q_0(t) \equiv 1.$$

Для $Q_1(t), Q_2(t), \ldots, Q_k(t), \ldots$ последовательно получаем

$$Q_1'(t) = \lambda Q_0(t) = \lambda,$$

$$Q_1(t) - Q_1(0) = \lambda t,$$

что с учетом $Q_1(0) = 0$ дает

$$Q_1(t) = \lambda t;$$

$$Q_2'(t) = \lambda Q_1(t) = \lambda^2 t,$$

$$Q_2(t) - Q_2(0) = \frac{\lambda^2 t^2}{2},$$

что с учетом $Q_2(0) = 0$ дает

$$Q_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2},$$

и т. д.,

$$Q_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Возвращаясь к функциям $P_k(t)$, получаем

$$P_k(t) = e^{-\lambda t} Q_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},\ k = 0, 1, \ldots$$

Так что для пуассоновского процесса $\{\xi(t), t \in [0, \infty), \xi(0) = 0\}$ с параметром λ, стартующего из нуля, при каждом t случайная величина $\xi(t)$ имеет пуассоновское распределение с параметром λt.

Эквивалентным выше данному определению пуассоновского процесса является следующее.

Определение 2. *Пуассоновским процессом с параметром* λ ($\lambda > 0$), *стартующим из нуля,* будем называть случайный процесс $\{\xi(t),\ t \in [0;+\infty), \xi(0) = 0\}$, удовлетворяющий следующим постулатам:

1) для любых $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n$ случайные величины $\xi(t_1) - \xi(t_0)$, $\xi(t_2) - \xi(t_1)$, $\ldots$, $\xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ независимы ($\xi(t)$ — процесс с независимыми приращениями),

2) приращения $\xi(t) - \xi(s)$, $0 \le s < t$, имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda(t-s)$:

$$P\{\xi(t) - \xi(s) = k\} = \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Неформально пуассоновский процесс с параметром λ, выходящий из нуля, можно описать так. Стартуя из нуля, процесс в течении времени τ_0, распределенном показательно с параметром λ, пребывает в состоянии 0. В момент времени τ_0 процесс скачком переходит в состояние 1 и пребывает в состоянии 1 в течении времени τ_1, распределенном показательно с параметром λ и не зависящим от τ_0. В момент времени $\tau_0 + \tau_1$ процесс скачком переходит в состояние 2 и пребывает в состоянии 2 в течении времени τ_2, распределенном показательно с параметром λ и не зависящим от τ_0 и τ_1. В момент времени $\tau_0 + \tau_1 + \tau_2$ процесс скачком переходит в состояние 3 и т. д.

Определение. Пусть $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots$ — последовательность независимых показательно распределенных с параметром λ случайные величины. Последовательность моментов времени (последовательность случайных величин)

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \tau_k,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

называется *простейшим потоком событий с параметром* λ (*интенсивности* λ).

Пуассоновский процесс с параметром λ задает простейший поток событий:

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \tau_k,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где τ_k — время пребывания процесса $\xi(t)$ в состоянии k, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Справедливо и обратное. Простейший поток событий

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \tau_k,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

с параметром λ определяет пуассоновский процесс

$$\{\xi(t),\, t \in [0; +\infty), \xi(0) = 0\}$$

с параметром λ, выходящий из нуля. В момент времени t процесс $\xi(t)$ принимает значение k, если $t_{k-1} < t \le t_k$, $k = 1, 2, \ldots$ На промежутке $[0, \tau_0]$ значение $\xi(t)$ равно 0.

Процесс Юла. Рассмотрим один важный частный случай процесса чистого рождения, так называемый процесс Юла.

Предположим, что в момент времени $t = 0$ в популяции имеется N особей ($N > 0$). Через $\xi(t)$ обозначим размер популяции в момент времени t. Предположим, что каждая особь популяции независимо от других в интервале времени длиной h с вероятностью $\beta h + o(h)$ порождает новую особь.

Если в момент времени t размер популяции $\xi(t) = k$, ($k = N, N+1, \ldots$), то за время h размер популяции увеличивается на 1 с вероятностью

$$C_k^1(\beta h + o(h))^1(1 - \beta h - o(h))^{k-1} = k\beta h + o(h),\ h \to 0+0.$$

Поэтому переходные вероятности процесса $\xi(t)$ при малых h ($h \to 0+0$) имеют вид

$$P\{\xi(t+h) = k+1 \,|\, \xi(t) = k\} = k\beta h + o(h),$$

$$P\{\xi(t+h) = k \,|\, \xi(t) = k\} = 1 - (k\beta h + o(h))$$

или

$$P_{k,k+1} = k\beta h + o(h) = \lambda_k h + o(h),$$

$$P_{k,k} = 1 - k\beta h + o(h) = 1 - \lambda_k h + o(h)$$

(у процесса Юла $\lambda_k = k\beta$).

Система уравнений (3.2.2) для вероятностей пребывания процесса Юла, стартующего из 1 (размер популяции $\xi(0)$ в момент времени 0 равен 1), имеет вид

$$\begin{cases} P_1'(t) = -\lambda_1 P_1(t), \\ P_{k+1}'(t) = -\lambda_{k+1}P_{k+1}(t) + \lambda_k P_k(t),\ k = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

подробнее,

$$\begin{cases} P_1'(t) = -\beta P_1(t), \\ P_{k+1}'(t) = -(k+1)\beta P_{k+1}(t) + k\beta P_k(t),\ k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Начальные условия

$$P_1(0) = 1,\ P_k(0) = 0,\ k = 2, 3, \dots$$

Решением этой системы является

$$P_1(t) = e^{-\beta t},$$

$$P_k(t) = e^{-\beta t}(1 - e^{-\beta t})^{k-1},\ k = 2, 3, \dots,$$

в чем можно убедиться непосредственной проверкой.

Заметим, что

$$P_k(t) = e^{-\beta t}(1 - e^{-\beta t})^{k-1},\ k = 1, 2, 3, \dots,$$

является геометрическим распределением с параметром $p_t = e^{-\beta t}$, "смещенным на 1", т. е. заданным на множестве $k = 1, 2, 3, \dots$

3.3 Процессы рождения и гибели

Естественным обобщением процесса чистого рождения является процесс рождения и гибели — если в момент t процесс находится в состоянии k, то за малое время h он переходит в одно из соседних состояний $(k+1)$ или $(k-1)$ или остается в том же состоянии k.

Определение. *Процессом рождения и гибели* будем называть стационарную марковскую цепь с непрерывным временем, переходные вероятности которой в окрестности нуля удовлетворяют постулатам:

1° $P_{k,k+1}(h) = \lambda_k h + o(h)$ при $h \to 0+0,\ k \geq 0$;

2° $P_{k,k-1}(h) = \mu_k h + o(h)$ при $h \to 0+0,\ k \geq 1$;

3° $P_{k,k}(h) = 1 - (\lambda_k + \mu_k)h + o(h)$ при $h \to 0+0,\ k \geq 0$;

4° $P_{k,j}(0) = \delta_{kj},\ k, j = 0, 1, 2, \dots$

Из 1° – 3° следует, что для $j \neq k-1, k, k+1$

$$P_{k,j}(h) = o(h),\ h \to 0+0$$

— вероятности перехода в состояния отличные от соседних есть величины порядка $o(h)$ при $h \to 0+0$.

Параметры λ_k, μ_k $(\mu_0 = 0, \lambda_0 > 0)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, неотрицательны, их называют *инфинитезимальными характеристиками* (*инфинитезимальными интенсивностями*) *рождения и гибели* соответственно.

В равенствах пунктов 1° — 3° член $o(h)$ может зависеть от k.

Определение. Матрицу

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \dots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3+\mu_3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

будем называть *инфинитезимальной матрицей процесса* рождения и гибели.

Замечание. Инфинитезимальная матрица процесса рождения и гибели — это матрица производных переходных вероятностей процесса в точке нуль.

Обратные дифференциальные уравнения Колмогорова для процесса рождения и гибели. Переходные вероятности $P_{i,j}(t)$ процесса рождения и гибели удовлетворяют системе дифференциальных уравнений, известных под названием обратных дифференциальных уравнений Колмогорова. Получим эти уравнения.

Пусть $h > 0, t > 0$. Из уравнения Колмогорова–Чепмена имеем при $i = 1, 2, \dots,\ j = 0, 1, 2, \dots$

$$P_{i,j}(h+t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{i,k}(h)P_{k,j}(t) =$$

$$= P_{i,i-1}(h)P_{i-1,j}(t) + P_{i,i}(h)P_{i,j}(t) + P_{i,i+1}(h)P_{i+1,j}(t) +$$

$$+ \sum_k{}' P_{i,k}(h)P_{k,j}(t),\ \ i = 1, 2, \dots, \tag{3.3.1}$$

в последней сумме суммирование ведется по всем $k \neq i-1, i, i+1$. При $h \to 0$

$$\sum_k{}' P_{i,k}(h)P_{k,j}(t) \le \sum_k{}' P_{i,k}(h) = 1 - (P_{i,i-1}(h) + P_{i,i}(h) + P_{i,i+1}(h)) =$$

$$= 1 - (\mu_i h + o(h)) - (1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h)) - (\lambda_i h + o(h)) = o(h).$$

Так что

$$\sum_k{}' P_{i,k}(h)P_{k,j}(t) = o(h).$$

Используя последнее равенство и постулаты 1°–3° процесса рождения и гибели, равенство (3.3.1) можно записать так:

$$P_{i,j}(t+h) = \mu_i h P_{i-1,j}(t) + (1-(\lambda_i+\mu_i)h)P_{i,j}(t) + \lambda_i h P_{i+1,j}(t) + o(h),$$

$i = 1, 2, \ldots$ Перенесем $P_{i,j}(t)$ в левую часть, разделим полученное равенство на h и перейдем к пределу при $h \to 0+0$. В результате получим

$$P'_{i,j}(t) = \mu_i P_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i)P_{i,j}(t) + \lambda_i P_{i+1,j}(t), \ i = 1, 2, \ldots \tag{3.3.2}$$

Для $i = 0$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ выкладки аналогичные приведенным выше дают

$$P'_{0,j}(t) = -\lambda_0 P_{0,j}(t) + \lambda_0 P_{1,j}(t), \tag{3.3.3}$$

при $t = 0$

$$P_{k,j}(0) = \delta_{kj}, \ k, j = 0, 1, 2, \ldots$$

Уравнения (3.3.2), (3.3.3) называются *обратными дифференциальными уравнениями Колмогорова.*

В обратных дифференциальных уравнениях начальное состояние является "переменным", а конечное состояние "фиксированным" (в $P_{i,j}$ меняется первый индекс).

Обратные дифференциальные уравнения удобно записывать в матричном виде

$$\mathbb{P}'(t) = \boldsymbol{\nu}\mathbb{P}(t),$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — инфинитезимальная матрица процесса рождения и гибели, $\mathbb{P}'(t) = [P'_{ij}(t)]$.

Прямые дифференциальные уравнения Колмогорова для процесса рождения и гибели. При выводе обратных дифференциальных уравнений Колмогорова мы воспользовались уравнением Колмогорова–Чепмена, разбив промежуток $(0, t+h)$ на части $(0, h)$ и $(h, t+h)$. Другая ситуация возникает если промежуток $(0, t+h)$ разбить на части $(0, t)$ и $(t, t+h)$ и использовать тот же подход, что и при выводе обратных дифференциальных уравнений.

Из уравнения Колмогорова–Чепмена при $j = 1, 2, \ldots$, $i = 0, 1, \ldots$ имеем

$$P_{i,j}(t+h) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{i,k}(t)P_{k,j}(h) =$$

$$= P_{i,j-1}(t)P_{j-1,j}(h) + P_{i,j}(t)P_{j,j}(h) + P_{i,j+1}(t)P_{j+1,j}(h) +$$

$$+\sum_k{}' P_{i,k}(t)P_{k,j}(h),\ j=1,2,\ldots \tag{3.3.4}$$

Оценим $\sum\limits_k{}' P_{i,k}(t)P_{k,j}(h)$:

$$\sum_k{}' P_{i,k}(t)P_{k,j}(h)=\sum_k{}' P_{i,k}(t)ho_k(1)=$$

$$=h\sup_k o_k(1)\sum_k{}' P_{i,k}(t)\le h\sup_k o_k(1).$$

Далее будем предполагать, что для $k\ne j-1, j, j+1$ переходные вероятности $P_{k,j}(h)=ho_k(1)$ при $h\to 0+0$ удовлетворяют соотношению

$$\sup_k o_k(1)=o(1).$$

В этих предположениях при $h\to 0+0$

$$\sum_k{}' P_{i,k}(t)P_{k,j}(h)=o(h).$$

Из равенства (3.3.4), последнего равенства и постулатов 1°–3° процесса рождения и гибели при $j=1,2,\ldots$ имеем

$$P_{i,j}(t+h)=P_{i,j-1}(t)(\lambda_{j-1}h+o(h))+P_{i,j}(t)(1-(\lambda_j+\mu_j)h+o(h))+$$

$$+P_{i,j+1}(t)(\mu_{j+1}h+o(h))+o(h).$$

Перенесем $P_{i,j}(t)$ в левую часть, разделим полученное равенство на h и перейдем к пределу при $h\to 0$. В результате для $j=1,2,\ldots$ получим

$$P'_{i,j}(t)=\lambda_{j-1}P_{i,j-1}(t)-(\lambda_j+\mu_j)P_{i,j}(t)+\mu_{j+1}P_{i,j+1}(t). \tag{3.3.5}$$

Для $j=0$, $i=0,1,\ldots$ выкладки аналогичные приведенным выше дают

$$P'_{i,0}(t)=-\lambda_0 P_{i,0}(t)+\mu_1 P_{i,1}(t). \tag{3.3.6}$$

При $t=0$ значения $P_{i,j}(0)=\delta_{ij},\ j=0,1,\ldots,\ i=0,1,\ldots$

Уравнения (3.3.5), (3.3.6) известны под названием *прямых дифференциальных уравнений Колмогорова.*

В прямых дифференциальных уравнениях конечное состояние является “переменным”, а начальное состояние “фиксированным” (в $P_{i,j}$ меняется второй индекс).

Прямые дифференциальные уравнения удобно записывать в матричном виде

$$\mathbb{P}'(t) = \boldsymbol{\nu}^T(\mathbb{P}(t))^T,$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — инфинитезимальная матрица процесса рождения и гибели, $\boldsymbol{\nu}^T$ и $(\mathbb{P}(t))^T$ — матрицы, транспонированные соответственно к матрицам $\boldsymbol{\nu}$ и $\mathbb{P}(t)$, $\mathbb{P}'(t) = [P'_{ij}(t)]$.

Эргодическая теорема для процесса рождения и гибели. Для процесса рождения и гибели имеет место следующее утверждение, аналогичное эргодической теореме для дискретных марковских цепей.

Теорема 3.3.1 (эргодическая для процесса рождения и гибели). *Переходные вероятности* $P_{i,j}(t)$, $i, j = 0, 1, 2, \ldots$, *процесса рождения и гибели с интенсивностями рождения* λ_j *и гибели* μ_j *и их производные* $P'_{i,j}(t)$ *при* $t \to \infty$ *имеют пределы*

$$\lim_{t\to\infty} P_{i,j}(t) = \pi_j,\ \lim_{t\to\infty} P'_{i,j}(t) = 0,\ j = 0, 1, 2, \ldots,$$

пределы π_j *не зависят от начального состояния* i *и удовлетворяют уравнениям*

$$\begin{array}{rcl} -\lambda_0\pi_0 + \mu_1\pi_1 & = & 0, \\ \lambda_{j-1}\pi_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j)\pi_j + \mu_{j+1}\pi_{j+1} & = & 0,\ j = 1, 2, \ldots \end{array}$$

Формально последние уравнения для пределов π_j получаются предельным переходом при $t \to \infty$ в правой и левой частях прямых дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\mathbb{P}'(t) = \boldsymbol{\nu}^T(\mathbb{P}(t))^T.$$

Предельные значения

$$\pi_j = \lim_{t\to+\infty} P_{ij}(t),\ j = 0, 1, 2, \ldots,$$

задают на фазовом пространстве $\{0, 1, 2, \ldots\}$ цепи вероятностное распределение (собственное или несобственное). Действительно, из

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{i,j}(t) = 1$$

имеем

$$\sum_{j=1}^{N} P_{i,j}(t) \le 1.$$

Предельным переходом при $t \to \infty$ получаем

$$\sum_{j=1}^{N} \pi_j \le 1,$$

отсюда при $N \to \infty$ имеем

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \le 1.$$

Определение. Вероятностное распределение

$$\pi_j = \lim_{t\to\infty} P_{i,j}(t),\ j = 0, 1, 2, \ldots,$$

называется *эргодическим распределением* процесса рождения и гибели.

Теорема 3.3.2 (о предельном значении вероятностей пребывания). *У процесса рождения и гибели предельные значения вероятностей пребывания $P_k(t)$ существуют и совпадают с эргодическими вероятностями:*

$$\lim_{t\to\infty} P_k(t) = \pi_k,\ k = 0, 1, \ldots$$

Доказательство. Достаточно показать, что для данного ε

$$|P_k(t) - \pi_k| \le \varepsilon$$

при достаточно больших t.

Пусть $\{x_i\}$ — начальное распределение цепи. Тогда

$$P_k(t) = P\{\xi(t) = k\} = \sum_{i=0}^{\infty} x_i P_{ik}(t)$$

Отсюда имеем

$$|P_k(t) - \pi_k| = \left| \sum_{i=0}^{\infty} x_i P_{ik}(t) - \sum_{i=0}^{\infty} x_i \pi_k \right| \le$$

$$\leq \sum_{i=0}^{N} x_i |P_{ik}(t) - \pi_k| + 2 \sum_{i=N+1}^{\infty} x_i.$$

Второе слагаемое не превосходит ε за счет выбора N достаточно большим, а первое не превосходит ε при достаточно больших t в силу эргодической теоремы.

Определение. Вероятностное распределение $\{v_j\}$ будем называть *стационарным распределением* процесса рождения и гибели с матрицей переходных вероятностей $[P_{i,j}(t)]$, если для всех $t > 0$

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i P_{i,j}(t) = v_j, \; j = 0, 1, 2, \ldots$$

Теорема 3.3.3 (об эргодическом и стационарном распределениях). *У процесса рождения и гибели эргодическое распределение является стационарным распределением и наоборот, собственное стационарное распределение является эргодическим.*

Доказательство. Убедимся, что эргодическое распределение является стационарным.

Из уравнения Колмогорова—Чепмена для любых s, t и N имеем

$$P_{jj}(s+t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{jk}(s) P_{kj}(t) \geq \sum_{k=0}^{N} P_{jk}(s) P_{kj}(t).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $s \to \infty$, получаем

$$\pi_j \geq \sum_{k=0}^{N} \pi_k P_{kj}(t)$$

(в силу эргодической теоремы $\lim\limits_{t\to\infty} P_{i,k}(t) = \pi_k$). А поскольку N произвольно, то и

$$\pi_j \geq \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{kj}(t), \; j = 0, 1, \ldots \tag{3.3.7}$$

На самом деле все нестрогие неравенства (3.3.7) являются равенствами

$$\pi_j = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{kj}(t), \; j = 0, 1, \ldots$$

Если предположить, что хотя бы одно из неравенств (3.3.7) строгое и просуммировать все неравенства (3.3.7), то

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j > \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{kj}(t) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \sum_{j=0}^{\infty} P_{kj}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k.$$

Из полученного противоречия следует, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_{kj}(t) = \pi_j,\ j = 0, 1, \ldots$$

Так что эргодическое распределение является стационарным.

Пусть теперь $\{v_j\}$ — собственное стационарное распределение цепи:

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i P_{ij}(t) = v_j,\ j = 0, 1, \ldots, \tag{3.3.8}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} v_j = 1.$$

Формально переходя к пределу при $t \to \infty$ в правой и левой частях равенств (3.3.8) (в силу эргодической теоремы пределы $P_{ij}(t)$ существуют), получаем

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i \pi_j = v_j,\ j = 0, 1, \ldots$$

Отсюда, учитывая что $\sum\limits_{i=0}^{\infty} v_i = 1$, имеем

$$v_j = \pi_j,\ j = 0, 1, \ldots$$

Корректность предельного переходя следует из неравенства

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} v_i P_{ij}(t) - \sum_{i=0}^{\infty} v_i \pi_j \right| \le \sum_{i=0}^{N} v_i |P_{ij}(t) - \pi_j| + 2 \sum_{i=N+1}^{\infty} v_i,$$

в котором правая часть меньше 2ε при достаточно больших t (второе слагаемое меньше ε за счет выбора N, при фиксированном N первое слагаемое меньше ε за счет выбора t).

Теорема 3.3.4 (о представлении эргодического распределения). *Пусть* $\{\xi(t), t \in [0,\infty)\}$ *— процесс рождения и гибели с интенсивностями роста* λ_j *и гибели* μ_j $(\mu_j > 0,\ j = 1,2,\ldots)$,

$$u_0 = 1,\ u_j = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\frac{\lambda_1}{\mu_2}\cdots\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j},\ j = 1,2,\ldots$$

Если

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k < \infty,$$

то существует собственное эргодическое распределение процесса $\{\xi(t), t \in [0,\infty)\}$ *и оно представимо в виде*

$$\pi_j = u_j \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k},\ j = 0,1,2,\ldots$$

Если

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = +\infty,$$

то эргодическое распределение является несобственным и

$$\pi_j = 0,\ j = 0,1,2,\ldots$$

Доказательство. Заметим, что

$$u_j = u_{j-1}\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j},\ j = 1,2,\ldots \tag{3.3.9}$$

Согласно эргодической теореме (см. теорему 3.3.1), эргодическое распределение $\{\pi_j\}$ (собственное или несобственное) существует и удовлетворяет уравнениям

$$-\lambda_0\pi_0 + \mu_1\pi_1 = 0,$$

$$\lambda_{j-1}\pi_{j-1} - (\lambda_j + \mu_j)\pi_j + \mu_{j+1}\pi_{j+1} = 0,\ j = 1,2,\ldots \tag{3.3.10}$$

Решение последней системы уравнений можно представить в виде

$$\pi_k = u_k\pi_0,\ k = 1,2,\ldots \tag{3.3.11}$$

Действительно, из первого уравнения имеем

$$\pi_1 = (\lambda_0/\mu_1)\pi_0 = u_1\pi_0.$$

Предположим, что представление (3.3.11) имеет место и при $k = 2, 3, \ldots, j$ и установим, что оно имеет место и для $k = j + 1$.

Из равенства (3.3.10) имеем

$$\mu_{j+1}\pi_{j+1} = (\lambda_j + \mu_j)\pi_j - \lambda_{j-1}\pi_{j-1}.$$

Из равенств

$$\pi_k = u_k\pi_0, \ k = 1, 2, \ldots, j,$$

и равенства (3.3.9) получаем

$$\mu_{j+1}\pi_{j+1} = (\lambda_j + \mu_j)u_j\pi_0 - \lambda_{j-1}u_{j-1}\pi_0 =$$

$$= \lambda_j u_j\pi_0 + (\mu_j u_j\pi_0 - \lambda_{j-1}u_{j-1}\pi_0) =$$

$$= \lambda_j u_j\pi_0 + (\mu_j u_j - \lambda_{j-1}u_{j-1})\pi_0 = \lambda_j u_j\pi_0,$$

т. е.

$$\mu_{j+1}\pi_{j+1} = \lambda_j u_j\pi_0$$

или

$$\pi_{j+1} = (\lambda_j/\mu_{j+1})u_j\pi_0 = u_{j+1}\pi_0, \ j = 1, 2, \ldots$$

Так что эргодическое распределение $\{\pi_k\}$ процесса рождения и гибели представимо в виде

$$\pi_k = u_k\pi_0, \ k = 0, 1, \ldots$$

Учитывая последнее представление, имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k = \sum_{k=0}^{\infty}u_k\pi_0 = \pi_0\sum_{k=0}^{\infty}u_k. \tag{3.3.12}$$

Если ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ сходится, то положив

$$\pi_0 = 1\Big/\sum_{k=0}^{\infty}u_k,$$

получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1,$$

т. е. существует собственное эргодическое распределение $\{\pi_k\}$, при этом

$$\pi_j = u_j \pi_0 = u_j \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k}, \ j = 0, 1, 2, \ldots$$

Единственность эргодического распределения следует из единственности предела

$$\pi_j = \lim_{t \to \infty} P_{i,j}(t), \ j = 0, 1, 2, \ldots$$

Если $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k = +\infty$ (ряд расходящийся), то из равенства

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = \pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} u_k,$$

учитывая, что $\{\pi_k\}$ — вероятностное распределение, следует, что $\pi_0 = 0$. Поэтому распределение

$$\pi_j = u_j \pi_0 = 0, \ j = 0, 1, 2, \ldots,$$

несобственное.

Замечание. Тот факт, что

$$\pi_k = 0, \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

(при $\sum\limits_k u_k = \infty$) обозначает, что цепь при $t \to \infty$ “уходит на ∞”.

3.4 Обслуживание с ожиданием

Мы рассмотрим классическую задачу теории массового обслуживания в той постановке, в какой она была решена А.К. Эрлангом.

1° На обслуживающий прибор поступает простейший поток требований интенсивности λ.

2° Если в момент поступления требования прибор свободен, требование начинает немедленно обслуживаться. Если прибор занят, то требование становится в очередь за поступившими ранее требованиями.

3° Время обслуживания ζ каждого требования показательно распределено с параметром μ и не зависит от продолжительности обслуживания ранее поступивших требований.

Задача. *Найти распределение длины $\xi(t)$ очереди — количества $\xi(t)$ требований в очереди в момент времени t (если не при всех t, то хотя бы при достаточно больших, т. е. в установившемся режиме).*

Реальных ситуаций, в которых возникают подобные задачи, великое множество. А.К. Эрланг решил эту задачу применительно к телефонной связи.

Рассмотрим подробнее введенные в пунктах 1° и 3° понятия простейшего потока требований и обслуживания требований.

Простейший поток требований. Под простейшим потоком требований интенсивности λ мы понимаем последовательность случайных величин

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \tau_k,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

где τ_k, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ — независимые показательно распределенные с параметром λ случайные величины:

$$P\{\tau_k < t\} = 1 - \lambda e^{-\lambda t},\ t > 0.$$

Значения $t_n, n = 0, 1, 2, \ldots$, мы интерпретируем как моменты поступления требований (t_n — момент поступления $(n+1)$-го требования, $t_0 = \tau_0$ — момент поступления первого требования), случайные величины τ_k, $k = 1, 2, \ldots,$ мы интерпретируем как промежутки между поступлениями требований.

В простейшем потоке требований с параметром λ за малое время h $(h \to 0+0)$ требования поступают так: одно требование поступает с вероятностью $\lambda h + o(h)$, два и больше требований поступают с вероятностью $o(h)$.

В самом деле, простейший поток требований с параметром λ определяет пуассоновский процесс $\{\xi(t), t \in [0; \infty)\}$ — число требований $\xi(t)$, поступивших к моменту времени t, $t \in [0; \infty)$. Для пуассоновского процесса с параметром λ

$$P\{\xi(t) - \xi(s) = k\} = \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)},\ k = 0, 1, \ldots$$

Поэтому

$$P\{\xi(t+h)-\xi(t)=1\}=\frac{(\lambda h)}{1!}e^{-\lambda h}=\lambda h(1-\lambda h+o(h))=\lambda h+o(h),$$

т. е. вероятность поступления одного требования за время h:

$$P\{\xi(t+h)-\xi(t)=1\}=\lambda h+o(h),\ h\to 0+0. \tag{3.4.1}$$

Вероятность поступления двух и более требований

$$P\{\xi(t+h)-\xi(t)\geq 2\}=1-P\{\xi(t+h)-\xi(t)\leq 1\}=$$

$$=1-(P\{\xi(t+h)-\xi(t)=0\}+P\{\xi(t+h)-\xi(t)=1\})=$$

$$=1-\left(\frac{(\lambda h)^0}{0!}e^{-\lambda h}+\frac{\lambda h}{1!}e^{-\lambda h}\right)=1-e^{-\lambda h}(1+\lambda h)=$$

$$=1-(1-\lambda h+o(h))(1+\lambda h)=(\lambda h)^2+o(h)=o(h),\ h\to 0+0,$$

т. е.

$$P\{\xi(t+h)-\xi(t)\geq 2\}=o(h),\ h\to 0+0. \tag{3.4.2}$$

Показательное время обслуживания. Из предположения о показательном распределении времени обслуживания ζ требования:

$$P\{\zeta<t\}=1-e^{-\mu t},\ t>0,$$

и независимости случайных величин $\zeta_1,\zeta_2,\ldots$ (время обслуживания ζ_i i-го требования не зависит от продолжительности обслуживания поступивших ранее требований) следует, что за малое время h ($h\to 0+0$) требования обслуживаются так: *одно требование за время h обслуживается с вероятностью $\mu h+o(h)$, два и более требований за время h обслуживаются с вероятностью $o(h), h\to 0+0$.*

Действительно, поскольку в каждый момент времени прибор обслуживает только одно требование, то вероятность того, что до момента h будет обслужено находящееся на обслуживании требование равна

$$P\{\zeta<h\}=1-e^{-\mu h}=\mu h+o(h),\ h\to 0+0, \tag{3.4.3}$$

где ζ — продолжительность обслуживания требования — показательно распределенная с параметром μ случайная величина.

Далее, требования обслуживаются одно за другим. Пусть ζ_i — время обслуживания i-го требования, $i=1,2,\ldots$ Тогда событие "до момента времени h будет обслужено n требований" представимо в виде

$$\{\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n < h\}.$$

Пусть A_h — событие "за время h будет обслужено более одного требования", Ясно, что

$$A_h \subset \bigcup_{n=2}^{\infty} \{\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n < h\},$$

$$P(A_h) \leq \sum_{n=2}^{\infty} P\{\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n < h\},$$

$$\{\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n < h\} \subset \bigcap_{i=1}^{n} \{\zeta_i < h\},$$

$$P\{\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n < h\} \leq \prod_{i=1}^{n} P\{\zeta_i < h\} = (\mu h + o(h))^n \leq (2\mu h)^n,$$

$$P(A_h) \leq \sum_{n=2}^{\infty} (2\mu h)^n \leq (2\mu h)^2 \frac{1}{1 - 2\mu h} \leq 8(\mu h)^2 = o(h),\ h \to 0 + 0,$$

т. е. вероятность того, что за малое время h ($h \to 0 + 0$) будет обслужено два или более требований равна $o(h)$, $h \to 0 + 0$.

Марковская цепь, описывающая очередь. Относительно длины очереди $\{\xi(t), t \in [0; +\infty)\}$ в задаче обслуживания с ожиданием имеет место следующее важное утверждение.

В предположениях о простейшем потоке поступления требований и показательном распределении времени их обслуживания длина очереди $\xi(t), t \in [0; \infty)$, является стационарной марковской цепью с непрерывным временем.

Выпишем элементы матрицы переходных вероятностей марковской цепи, описывающей длину очереди требований.

Пусть длина очереди $\xi(t) = k$ и h малое ($h \to 0 + 0$). Вероятность $P\{\xi(t + h) = k + 1 \mid \xi(t) = k\}$ увеличения длины очереди на единицу за время h равна вероятности поступления одного требования за время h, эта вероятность равна $\lambda h + o(h)$, $h \to 0 + 0$. Поэтому

$$P\{\xi(t + h) = k + 1 \mid \xi(t) = k\} = \lambda h + o(h),\ h \to 0 + 0,$$

или

$$P_{k;k+1}(h) = \lambda h + o(h),\ h \to 0+0.$$

Пусть длина очереди $\xi(t) = k > 0$ и h малое ($h \to 0+0$). Вероятность $P\{\xi(t+h) = k-1 \,|\, \xi(t) = k\}$ уменьшения длины очереди на единицу за время h равна вероятности того, что за время h будет обслужено одно требование, эта вероятность равна $\mu h + o(h), h \to 0+0$. Поэтому

$$P\{\xi(t+h) = k-1 \,|\, \xi(t) = k\} = \mu h + o(h),\ h \to 0+0,$$

или

$$P_{k;k-1}(h) = \mu h + o(h),\ h \to 0+0.$$

Далее, вероятность того, что за малое время h ($h \to 0+0$) длина очереди изменится более чем на 1 равна $o(h)$, поскольку вероятность увеличения длины очереди более чем на единицу равна $o(h)$ и вероятность уменьшения длины очереди более чем на единицу равна $o(h)$, $h \to 0+0$. Поэтому вероятность $P\{\xi(t+h) = k \,|\, \xi(t) = k\}$ того, что длина очереди за время h не изменится, равна вероятности события, противоположного к событию "длина очереди увеличится на 1, или уменьшится на 1, или изменится более чем на 1":

$$P\{\xi(t+h) = k \,|\, \xi(t) = k\} = 1 - (\lambda h + \mu h + o(h)),$$

или

$$P_{k;k}(h) = 1 - (\lambda h + \mu h) + o(h),\ h \to 0+0.$$

Таким образом, для марковской цепи $\{\xi(t), t \in [0,\infty)\}$, описывающей длину очереди, в предположениях о простейшем потоке поступления требований и показательном распределении времени их обслуживания имеют место следующие утверждения: при $h \to 0+0$

$$P_{k,k+1}(h) = \lambda h + o(h),$$

$$P_{k,k-1}(h) = \mu h + o(h),$$

$$P_{k,k}(h) = 1 - (\lambda + \mu)h + o(h).$$

Последнее означает, что *марковская цепь* $\{\xi(t), t \in [0;\infty)\}$*, описывающая очередь, является процессом рождения и гибели с интенсивностями рождения* λ *и гибели* μ*.*

Предельное поведение длины очереди. Рассмотрим поведение длины очереди $\{\xi(t), t \in [0;\infty)\}$ при больших t ($t \to \infty$).

Согласно теореме об эргодическом распределении процесса рождения и гибели (см. теорему 3.3.1) длина очереди, как процесс рождения и гибели, имеет эргодическое распределение — распределение $P\{\xi(t) = j\}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, длины очереди $\xi(t)$ при $t \to \infty$ стремится к некоторому предельному распределению $\{\pi_j\}$. При этом, согласно теореме о представлении эргодического распределения (см. теорему 3.3.4), если

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k < \infty,$$

то эргодическое распределение представимо в виде

$$\pi_j = u_j \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k}, \; j = 1, 2, \ldots,$$

а если

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = +\infty,$$

то эргодическое распределение является несобственным и

$$\pi_j = 0, \; j = 0, 1, 2, \ldots,$$

где

$$u_0 = 1, \; u_j = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \frac{\lambda_1}{\mu_2} \cdots \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}, \; \mu_j > 0, \; j = 1, 2, \ldots$$

Поэтому если в цепи $\{\xi(t), t \in [0; \infty)\}$, описывающей очередь, значение λ/μ меньше 1, т. е. среднее время обслуживания одного требования $1/\mu$ меньше среднего времени $1/\lambda$ между поступлением требований, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = \frac{\mu}{\mu - \lambda} < \infty,$$

и, следовательно, цепь имеет собственное эргодическое распределение:

$$\pi_j = \frac{u_j}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k} = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j, \; j = 0, 1, 2, \ldots$$

(совпадающее с геометрическим распределением с параметром $1-\lambda/\mu$). Последнее означает, что если $\lambda/\mu < 1$, то при достаточно больших t распределение длины очереди “устанавливается”.

Если, например, $\lambda = 1$, $\mu = 2$ — среднее время обслуживания одной заявки $1/\mu = 1/2$, среднее время между поступлениями требований $1/\lambda = 1$, то

$$\pi_0 = 1/2,\ \pi_1 = 1/4,\ \pi_2 = 1/8,\ \pi_3 = 1/16,\ \ldots$$

Эти равенства можно интерпретировать так: с течением времени в очереди с вероятностью 1/2 будут отсутствовать требования, с вероятностью 1/4 будет одно требование, с вероятностью 1/8 — два требования, ...

Если $\lambda/\mu > 1$ — среднее время обслуживания $1/\mu$ одной заявки больше среднего времени $1/\lambda$ между поступлениями требований, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = \infty,$$

эргодическое распределение цепи $\xi(t)$ несобственное и имеет вид

$$\pi_k = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Последнее означает, что если $\lambda/\mu > 1$, то со временем распределение длины очереди требований “уходит на ∞” — длина очереди со временем неограниченно растет.

Мы рассмотрели простейшую ситуацию — одного обслуживающего прибора. Разумеется, обслуживающих приборов может быть больше одного.

3.5 Свойство дифференцируемости переходных вероятностей

Из предположения непрерывности в нуле переходных вероятностей $P_{ij}(t)$ стационарной марковской цепи с непрерывным временем можно получить неожиданно много содержательных результатов. Одним из таких результатов является дифференцируемость $P_{ij}(t)$.

Мы докажем дифференцируемость $P_{ij}(t)$, $i, j = 0, 1, 2, \ldots$, в точке 0. Дифференцируемость $P_{ii}(t)$ и $P_{ij}(t)$ $(j \neq i)$ будем доказывать по отдельности.

Теорема 3.5.1 (о дифференцируемости $P_{ii}(t)$). *Если переходные вероятности $P_{ii}(t)$ марковской цепи непрерывны в нуле, то они и дифференцируемы в нуле — существует конечный или бесконечный предел*

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-P_{ii}(t)}{t} = -P'_{ii}(0) = q_i$$

для каждого i.

Доказательство. Нам будет удобно доказать дифференцируемость в нуле функции

$$\varphi(t) = -\ln P_{ii}(t),\ t\in[0,\infty).$$

Дифференцируемость $P_{ii}(t)$ будет следовать из равенства

$$P_{ii}(t) = \exp\{-\varphi(t)\},\ t\in[0,\infty).$$

Функция $\varphi(t) = -\ln P_{ii}(t)$ определена корректно, поскольку при всех $t\geq 0$ значение $P_{ii}(t)>0$. В самом деле из непрерывности $P_{ii}(t)$ в нуле и равенства $P_{ii}(0)=1$ следует, что для данного $\varepsilon>0$ найдется такое u, что при всех s из $[0,u]$

$$P_{ii}(s) > 1-\varepsilon.$$

А в силу следствия из уравнения Колмогорова-Чепмена для данного t и любого n

$$P_{ii}(t) \geq \left(P_{ii}\left(t/n\right)\right)^n.$$

При достаточно больших n значение $s=t/n$ принадлежит промежутку $[0,u]$, поэтому

$$P_{ii}(t) > 0$$

для всех $t\in[0;\infty)$.

Отметим, что функция $\varphi(t)$

1° неотрицательна и конечна;

2° полуаддитивна:

$$\varphi(t+s) \leq \varphi(t)+\varphi(s).$$

Неотрицательность и конечность $\varphi(t)$ следуют из неравенств

$$0 < P_{ii}(t) \leq 1,$$

полуаддитивность $\varphi(t)$ следует из неравенства

$$P_{ii}(t+s) \geq P_{ii}(t)P_{ii}(s).$$

Дифференцируемость $\varphi(t)$ в точке 0, т. е. существование предела

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t},$$

мы докажем, установив, что верхний и нижний пределы $\varphi(t)/t$ равны числу

$$q_i = \sup_{t>0}\frac{\varphi(t)}{t}:$$

а именно,

$$\underline{\lim}_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t} = q_i, \ \ \overline{\lim}_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t} = q_i.$$

Поскольку $\varphi(t) \in [0,\infty)$, то $\sup\limits_{t>0}(\varphi(t)/t) = q_i$ может принимать, вообще говоря, любые значения из $[0;+\infty]$. Мы рассмотрим отдельно случаи $q_i < \infty$ и $q_i = +\infty$.

1° Пусть

$$q_i = \sup_{t>0}\frac{\varphi(t)}{t} < \infty.$$

По определению $\sup\limits_{t>0}(\varphi(t)/t) = q_i$ для данного $\varepsilon > 0$ найдется $t_0 > 0$ такое, что

$$q_i - \varepsilon \leq \frac{\varphi(t_0)}{t_0}.$$

Представим t_0 в виде

$$t_0 = nh + \delta, \ 0 \leq \delta < h < t_0, n \geq 0.$$

В силу полуаддитивности $\varphi(s)$ имеем:

$$q_i - \varepsilon \leq \frac{\varphi(t_0)}{t_0} = \frac{\varphi(nh+\delta)}{t_0} \leq \frac{n\varphi(h)+\varphi(\delta)}{t_0} = \frac{n\varphi(h)}{t_0} + \frac{\varphi(\delta)}{t_0} =$$

$$= \frac{nh}{t_0}\cdot\frac{\varphi(h)}{h} + \frac{\varphi(\delta)}{t_0},$$

т. е.

$$q_i - \varepsilon \leq \frac{nh}{t_0}\cdot\frac{\varphi(h)}{h} + \frac{\varphi(\delta)}{t_0}.$$

Вычислим нижний предел от правой и левой частей последнего неравенства при $h \to 0$:

$$q_i - \varepsilon \le \varliminf_{h\to 0} \left(\frac{nh}{t_0} \cdot \frac{\varphi(h)}{h} + \frac{\varphi(\delta)}{t_0} \right) = \lim_{h\to 0} \frac{nh}{t_0} \cdot \varliminf_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(\delta)}{t_0}.$$

Значение

$$\varliminf_{h\to 0} \varphi(\delta) = \lim_{h\to 0} \varphi(\delta) = 0,$$

поскольку функция $\varphi(s)$ непрерывна в нуле, $\varphi(0) = 0$ и $\delta \to 0$ при $h \to 0$. Равенство

$$\varliminf_{h\to 0} \frac{nh}{t_0} = \lim_{h\to 0} \frac{nh}{t_0} = 1$$

следует из равенства $t_0 - nh = \delta$. Поэтому

$$q_i - \varepsilon \le \varliminf_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h}.$$

И, следовательно,

$$q_i - \varepsilon \le \varliminf_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h} \le \varlimsup_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h} \le \sup_{h>0} \frac{\varphi(h)}{h} = q_i.$$

А поскольку ε произвольно, то

$$q_i = \varliminf_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h} = \varlimsup_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h} = q_i.$$

Поэтому, во-первых, существует

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t)}{t} = \varphi'(0)$$

и, во-вторых,

$$\varphi'(0) = \sup_{t>0} \frac{\varphi(t)}{t} = q_i.$$

Далее, поскольку

$$P_{ii}(t) = \exp\{-\varphi(t)\},$$

то
$$P'_{ii}(t) = -\varphi'(t)\exp\{-\varphi(t)\},$$
$$P'_{ii}(0) = -\varphi'(0)e^0 = -\varphi'(0) = -q_i.$$
Так что
$$-P'_{ii}(0) = q_i = \sup_{t>0}\frac{\varphi(t)}{t}.$$

2° Пусть теперь
$$\sup_{t>0}\frac{\varphi(t)}{t} = q_i = +\infty.$$

Из равенства
$$\sup_{t>0}(\varphi(t)/t) = q_i = +\infty$$
следует, что для данного $M > 0$ найдется $t_0 > 0$ такое, что
$$M \le \frac{\varphi(t_0)}{t_0}.$$
Отсюда, повторяя приведенные выше рассуждения, получим
$$M \le \varliminf_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t}.$$
Поскольку M может быть выбрано сколь угодно большим, то
$$+\infty \le \varliminf_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t} \le \varlimsup_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t}.$$
И, следовательно,
$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t} = q_i = +\infty.$$

Теорема 3.5.2 (о дифференцируемости $P_{ij}(t)$). *Если переходные вероятности $P_{ij}(t)$ $i, j = 0, 1, 2, \ldots$, марковской цепи непрерывны в нуле, то $P_{ij}(t)$, $j \ne i$, дифференцируемы в нуле —существуют конечные пределы*
$$\lim_{t\to 0}\frac{P_{ij}(t)}{t} = P'_{ij}(0) = q_{ij},\ j \ne i,$$
$i, j = 0, 1, 2, \ldots$

Доказательство. Сначала докажем лемму.

Для данных i, j $(j \neq i)$ и $\varepsilon > 0$ найдется t_0 (достаточно малое), что при любых h и n (n — целое неотрицательное) таких, что $0 < nh < t_0$, выполняется неравенство

$$(1-3\varepsilon)\frac{P_{ij}(h)}{h} \leq \frac{P_{ij}(nh)}{nh}. \tag{3.5.1}$$

Доказательство леммы. Для данного h (произвольного, но фиксированного) по марковской цепи $\{\xi(t),\ t \in [0,\infty)\}$ с непрерывным временем определим марковскую цепь $\{\xi_{k,h}\}$ с дискретным временем:

$$\xi_{k,h} = \xi(kh),\ k = 0, 1, \ldots$$

Матрица одношаговых переходных вероятностей цепи $\{\xi_{k,h}\}$ равна $[P_{ij}(h)]$, а матрица n-шаговых переходных вероятностей равна $[P_{ij}(nh)]$.

Для марковской цепи $\{\xi_{n,h}\}$ определим вероятности ${}_jP_{ii}(nh)$ перехода из i в i с запретами:

$${}_jP_{ii}(0) = 1,$$

$${}_jP_{ii}(nh) = P\{\xi_{n,h} = i,\, \xi_{0,h} = i,\, \xi_{\nu,h} \neq j,\, \nu = 1, 2, \ldots, n{-}1 \,|\, \xi_{0,h} = i\}$$

— вероятность того, что цепь $\{\xi_{k,h}\}$, стартовав из i, за n шагов вернется в i без захода в j. Напомним еще, что

$$f_{ij}(nh) = P\{\xi_{n,h} = j,\, \xi_{0,h} = i,\, \xi_{\nu,h} \neq j,\, \nu = 1, 2, \ldots, n{-}1 \,|\, \xi_{0,h} = i\}.$$

Имеет место следующее неравенство:

$$P_{ij}(nh) \geq \sum_{\nu=0}^{n-1} {}_jP_{ii}(\nu h) P_{ij}(h) P_{jj}((n-(\nu+1))h) \quad (j \neq i). \tag{3.5.2}$$

Каждое слагаемое в правой части (3.5.2) соответствует пути длиной n, ведущему из состояния i в состояние j (шаг длиной h), у которого имеется переход из i в j за один шаг. Эти пути несовместны, но, вообще говоря, не исчерпывают всех путей из i в j за n шагов (здесь учтены только пути, у которых имеется переход из i в j за один шаг, но среди путей из i в j не все такие).

Оценим правую часть (3.5.2) снизу. Для этого сначала оценим снизу ${}_jP_{ii}(\nu h)$, воспользовавшись равенством

$$P_{ii}(\nu h) = \sum_{m=1}^{\nu-1} f_{ij}(mh)P_{ji}((\nu - m)h) + {}_jP_{ii}(\nu h),$$

— переход из i в i за ν шагов возможен с заходом в j и без захода в j. Имеем

$${}_jP_{ii}(\nu h) = P_{ii}(\nu h) - \sum_{m=1}^{\nu-1} f_{ij}(mh)P_{ji}((\nu - m)h) \geq$$

$$\geq P_{ii}(\nu h) - \max_{1\leq m\leq \nu-1} P_{ji}((\nu - m)h) \sum_{m=1}^{\nu-1} f_{ij}(mh) \geq$$

$$\geq P_{ii}(\nu h) - \max_{1\leq m\leq \nu-1} P_{ji}((\nu - m)h),$$

т. е.

$${}_jP_{ii}(\nu h) \geq P_{ii}(\nu h) - \max_{1\leq m\leq \nu-1} P_{ji}((\nu - m)h). \tag{3.5.3}$$

Из (3.5.2) и (3.5.3) имеем

$$P_{ij}(nh) \geq$$

$$\geq \sum_{\nu=0}^{n-1} \bigl(P_{ii}(\nu h) - \max_{1\leq m\leq \nu-1} P_{ji}((\nu - m)h)\bigr) P_{ij}(h) P_{jj}((n - (\nu + 1))h)). \tag{3.5.4}$$

Далее, пусть $\varepsilon > 0$ (произвольное, но фиксированное). Для данных i, j в силу непрерывности $P_{ii}(t)$, $P_{ji}(t)$, $P_{jj}(t)$ найдется такое t_0 (достаточно малое), что при $0 \leq t \leq t_0$

$$P_{ii}(t) \geq 1 - \varepsilon, \;\; P_{ji}(t) \leq \varepsilon, \;\; P_{jj}(t) \geq 1 - \varepsilon.$$

Поэтому для любых $h > 0$ и целых k таких, что $0 < kh < t_0$ имеют место неравенства

$$P_{ii}(kh) \geq 1 - \varepsilon, \;\; P_{ji}(kh) \leq \varepsilon, \;\; P_{jj}(kh) \geq 1 - \varepsilon.$$

Учитывая последние три неравенства, для $h > 0$ и n таких, что $nh < t_0$, из неравенства (3.5.4) получаем

$$P_{ij}(nh) \geq \sum_{\nu=0}^{n-1}(1-\varepsilon-\varepsilon)P_{ij}(h)(1-\varepsilon) =$$

$$= (1-2\varepsilon)(1-\varepsilon)nP_{ij}(h) \geq (1-3\varepsilon)nP_{ij}(h),$$

или

$$P_{ij}(nh) \geq (1-3\varepsilon)nP_{ij}(h).$$

Разделив обе части последнего неравенства на nh, получим неравенство (3.5.1).

Тем самым лемма доказана.

Дальнейшее доказательство теоремы будет основано на неравенстве (3.5.1).

Обозначим

$$q_{ij} = \varliminf_{h\to 0} \frac{P_{ij}(h)}{h}.$$

Заметим, что значение

$$q_{ij} < \infty.$$

Действительно, из леммы следует, что для данного $\varepsilon > 0$ найдется такое t_0, что для любых n и h, удовлетворяющих условию $nh \in (t_0/2,\ t_0) \subset (0,\ t_0]$,

$$(1-3\varepsilon)\frac{P_{ij}(h)}{h} \leq \frac{P_{ij}(nh)}{nh} \leq \frac{1}{t_0/2} = \frac{2}{t_0},$$

поэтому $q_{ij} < \infty$.

Далее докажем, что

$$\varlimsup_{t\to 0} \frac{P_{ij}(t)}{t} \leq q_{ij} = \varliminf_{t\to 0} \frac{P_{ij}(t)}{t}.$$

Поскольку

$$q_{ij} = \varliminf_{t\to 0} \frac{P_{ij}(t)}{t},$$

то для данного $\varepsilon > 0$ найдется $t' \in (0,\ t_0)$ такое, что

$$\frac{P_{ij}(t')}{t'} < q_{ij} + \varepsilon.$$

В силу непрерывности $P_{ij}(t)$ последнее неравенство имеет место и в некоторой окрестности $(t'-h_0, t'+h_0)$ точки t' (дополнительно выберем ее принадлежащей промежутку $(0,t_0)$), т. е.

$$\frac{P_{ij}(t)}{t} \le q_{ij} + \varepsilon, \quad t \in (t'-h_0, t'+h_0) \subset (0,t_0). \tag{3.5.5}$$

Для достаточно малых h $(0 < h < h_0)$ найдется такое n, что $nh \in (t'-h_0, t'+h_0) \subset (0,t_0)$. Поэтому из (3.5.1) и (3.5.5) имеем

$$(1-3\varepsilon)\frac{P_{ij}(h)}{h} \le \frac{P_{ij}(nh)}{nh} \le q_{ij} + \varepsilon$$

при $h < h_0$. Так что для $h < h_0$

$$(1-3\varepsilon)\frac{P_{ij}(h)}{h} \le q_{ij} + \varepsilon.$$

Вычисляя верхний предел при $h \to 0$ от правой и левой частей последнего неравенства, получим

$$(1-3\varepsilon)\varlimsup_{h\to 0}\frac{P_{ij}(h)}{h} \le q_{ij} + \varepsilon,$$

а поскольку ε можно выбрать сколь угодно малым, то

$$\varlimsup_{h\to 0}\frac{P_{ij}(h)}{h} \le q_{ij},$$

что вместе с равенством

$$q_{ij} = \varliminf_{h\to 0}\frac{P_{ij}(h)}{h}$$

завершает доказательство теоремы.

Пример 3.5.1. *Для процесса рождения и гибели с интенсивностями роста λ_i и гибели μ_i вычислить*

$$q_i = -P'_{ii}(0) \quad \text{и} \quad q_{ij} = P'_{ij}(0).$$

Решение. По определению процесса рождения и гибели при $h \to 0+0$

$$P_{ij}(h) = \begin{cases} \lambda_i h + o(h), & \text{если } j = i+1; \\ 1-(\lambda_i+\mu_i)h + o(h), & \text{если } j = i; \\ \mu_i h + o(h), & \text{если } j = i-1. \end{cases}$$

$P_{ij}(h)$ непрерывны в нуле, поэтому согласно теореме о дифференцируемости $P_{ij}(h)$ существуют производные $P'_{ii}(0)$ и $P'_{ij}(0)$, $j \neq i$ (собственно говоря, существование производных следует и из вида переходных вероятностей $P_{ij}(h)$). При этом

$$q_i = -P'_{ii}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{1 - P_{ii}(h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1 - (1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h))}{h} = \lambda_i + \mu_i,$$

$$q_{i,i+1} = P'_{i,i+1}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{P_{i,i+1}(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\lambda_i h + o(h)}{h} = \lambda_i,$$

$$q_{i,i-1} = P'_{i,i-1}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\mu_i h + o(h)}{h} = \mu_i,$$

для $j \neq i-1, i, i+1$

$$P'_{ij}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{P_{i,j}(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0.$$

3.6 Распределение времени пребывания в состоянии

Из теоремы о дифференцируемости $P_{ii}(t)$ мы получим важное утверждение о распределении времени пребывания цепи в данном состоянии.

О п р е д е л е н и е. *Временем пребывания в состоянии i марковской цепи $\{\xi(t),\, t \in [0,\infty)\}$, стартующей из i, будем называть случайную величину τ_i, определяемую равенством*

$$\tau_i = \inf\{t : \xi(t) \neq i,\, \xi(0) = i\}.$$

Марковская цепь $\{\xi(t),\, t \in [0,\infty)\}$ в момент τ_i скачком уходит из состояния i. Мы будем считать, что в момент τ_i значение $\xi(\tau_i)$ все еще равно i, т. е. $\xi(\tau_i) = i$.

Т е о р е м а 3.6.1 (о распределении времени пребывания). *Если у стационарной марковской цепи $\{\xi(t),\, t \in [0,\infty)\}$*

$$q_i < \infty,$$

то время пребывания τ_i в состоянии i цепи, стартующей из i, имеет показательное распределение с параметром q_i:

$$P\{\tau_i < t \,|\, \xi(0) = i\} = 1 - \exp\{-q_i t\},\ t \geq 0.$$

Доказательство. Пусть $t > 0$ — произвольное фиксированное. Рассмотрим событие

$$\{\tau_i \geq t, \xi(0) = i\}$$

— время пребывания τ_i цепи, стартующей из состояния i, в состоянии i больше t. Разобьем промежуток $[0, t]$ точками

$$s_k = k\frac{t}{2^n},\ k = 0, 1, \ldots, 2^n\,(s_0 = 0, s_{2^n} = t)$$

и обозначим через $A_n(t)$ событие, состоящее в том, что в моменты времени s_k, $k = 0, 1, \ldots, 2^n$, цепь находится в состоянии i:

$$A_n(t) = \{\xi\,(s_0) = i,\, \xi\,(s_1) = i,\, \ldots,\, \xi\,(s_{2^n}) = i\}\,.$$

Ясно, что

$$A_{n+1}(t) \subset A_n(t),\ n = 1, 2, \ldots$$

Непосредственной проверкой можно убедится, что

$$\{\tau_i \geq t, \xi(s_0) = i\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n(t).$$

Из последнего равенства в силу свойства непрерывности вероятности имеем

$$P\{\tau_i \geq t, \xi(s_0) = i\} = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n(t)\right) = \lim_n P\left(A_n(t)\right). \quad (3.6.1)$$

Вычислим $\lim\limits_n P\left(A_n(t)\right)$.

В марковской цепи конечномерные распределения, в частности и

$$P(A_n(t)) = P\{\xi(s_0) = i,\, \xi(s_1) = i,\, \ldots,\, \xi(s_{2^n-1}) = i, \xi(s_{2^n}) = i\},$$

выражаются через распределение начального состояния и переходные вероятности (см. (3.1.3)):

$$P(A_n(t)) = P\{\xi(s_0) = i,\, \xi(s_1) = i,\, \ldots,\, \xi(s_{2^n-1}) = i, \xi(s_{2^n}) = i\} =$$

$$= P\{\xi(s_{2^n}) = i \,|\, \xi(s_{2^n-1}) = i\}P\{\xi(s_{2^n-1}) = i \,|\, \xi(s_{2^n-2}) = i\}\ldots$$

$$\ldots P\{\xi(s_1) = i \,|\, \xi(s_0) = i\}P\{\xi(s_0) = i\} =$$

$$= \left(P_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right)\right)^{2^n} \cdot P\{\xi(s_0) = i\}.$$

Поэтому (3.6.1) можно переписать так

$$P\{\tau_i \geq t, \xi(s_0) = i\} = P\{\xi(s_0) = i\} \lim_n \left(P_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right)\right)^{2^n}.$$

Найдем $\lim\limits_n \left(P_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right)\right)^{2^n}$.

Поскольку $P_{ii}(s)$ дифференцируема в нуле и по условию теоремы $-P'_{ii}(0) = q_i < \infty$, то

$$P_{ii}(s) = 1 - q_i s + o(s),\ s \to 0.$$

Положив $s = t/2^n$, при $n \to \infty$ получим:

$$P_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right) = 1 - q_i \frac{t}{2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right), \tag{3.6.2}$$

$$\left(P_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right)\right)^{2^n} = \left(1 - q_i \frac{t}{2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)^{2^n} = \varphi_n(t),$$

$$\ln \varphi_n(t) = 2^n \ln\left(1 - q_i \frac{t}{2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)\right) \sim$$

$$\sim 2^n \left(-q_i \frac{t}{2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)\right) = -q_i t + o(1),$$

$$\ln \varphi_n(t) \to -q_i t,$$

$$\varphi_n(t) \to e^{-q_i t}.$$

Так что при $n \to \infty$

$$\varphi_n(t) = \left(P_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right)\right)^{2^n} \to e^{-q_i t},$$

$$\lim_n P(A_n(t)) = P\{\xi(s_0) = i\} e^{-q_i t}.$$

Поэтому равенство (3.6.1) можно переписать так:

$$P\{\tau_i \geq t, \xi(s_0) = i\} = P\{\xi(s_0) = i\} e^{-q_i t}.$$

Отсюда
$$P\{\tau_i \geq t \,|\, \xi(0) = i\} = e^{-q_i t}, \ t > 0,$$
$$P\{\tau_i < t \,|\, \xi(0) = i\} = 1 - e^{-q_i t}, \ t > 0,$$
т. е. время пребывания цепи, стартующей из состояния i, в состоянии i имеет показательное распределение.

Следствие. *Если $q_i = 0$, то*
$$P\{\tau_i = +\infty \,|\, \xi(0) = i\} = 1,$$
Другими словами, если $q_i = 0$, то цепь, стартовав из состояния i, останется в i навсегда.

Доказательство. При $q_i = 0$ из равенства (3.6.2) имеем
$$P_{ii}\left(\frac{t}{2^n}\right) = 1 + o\left(\frac{1}{2^n}\right).$$
Отсюда, повторяя выкладки теоремы, получим что для любого $t > 0$
$$P\{\tau_i \geq t \,|\, \xi(0) = i\} = 1.$$
Переходя в последнем равенстве к пределу при $t \to +\infty$, получим
$$P\{\tau_i \geq +\infty \,|\, \xi(0) = i\} = 1.$$

Определение. Состояние i, для которого
$$q_i < \infty,$$
называется *устойчивым.*

Состояние i, для которого
$$q_i = 0,$$
называется *поглощающим* (цепь, попав в поглощающее состояние i, остается в нем навсегда).

Состояние i, для которого
$$q_i = +\infty,$$
называется *мгновенным.*

Среднее время пребывания цепи во мгновенном состоянии равно нулю. Попадая в такое состояние, цепь мгновенно его покидает. Теория марковских цепей с непрерывным временем, имеющих мгновенные состояния, крайне сложна.

Мы не будем рассматривать марковские цепи, у которых имеются мгновенные либо поглощающие состояния.

Вложенная цепь. Событие "цепь, пребывая в состоянии i, в момент времени t покидает i" обозначает, что для любого, сколь угодно малого h, происходит событие

$$\{\xi(t) = i,\, \xi(t+h) \neq i\}.$$

Обозначим через

$$R_{ij}(h) = P\{\xi(t+h) = j \,|\, \xi(t) = i,\, \xi(t+h) \neq i\}$$

вероятность того, что цепь в момент $t+h$ пребывает в состоянии j при условии, что пребывая в момент t в состоянии i, в момент $t+h$ она в состоянии i не пребывает. Тогда

$$p_{ij} = \lim_{h\to 0} R_{ij}(h)$$

естественно рассматривать (интерпретировать) как вероятность события "покидая состояние i, цепь переходит в состояние j".

Убедимся, что $\lim\limits_{h\to 0} R_{ij}(h)$ существует, и более того

$$\lim_{h\to 0} R_{ij}(h) = \frac{q_{ij}}{q_i}.$$

Для $R_{ij}(h)$ имеем

$$R_{ij}(h) = P\{\xi(t+h) = j \,|\, \xi(t) = i,\, \xi(t+h) \neq i\} =$$

$$= \frac{P\{\xi(t+h) = j,\, \xi(t) = i,\, \xi(t+h) \neq i\}}{P\{\xi(t) = i,\, \xi(t+h) \neq i\}} =$$

$$= \frac{P\{\xi(t+h) = j,\, \xi(t) = i\}}{P\{\xi(t+h) \neq i,\, \xi(t) = i\}} = \frac{P\{\xi(t+h) = j \,|\, \xi(t) = i\}}{P\{\xi(t+h) \neq i \,|\, \xi(t) = i\}} =$$

$$= \frac{P\{\xi(t+h) = j \,|\, \xi(t) = i\}}{1 - P\{\xi(t+h) = i \,|\, \xi(t) = i\}} = \frac{P_{ij}(h)}{1 - P_{ii}(h)},$$

т. е.

$$R_{ij}(h) = \frac{P_{ij}(h)}{1 - P_{ii}(h)}, \tag{3.6.3}$$

мы воспользовались тем, что

$$\{\xi(t+h) = j, \xi(t) = i\} \subset \{\xi(t+h) \neq i, \xi(t) = i\},$$

$$\{\xi(t+h)=j,\xi(t+h)\neq i,\xi(t)=i\}=\{\xi(t+h)=j,\xi(t)=i\}.$$

Разделив числитель и знаменатель правой части равенства (3.6.3) на h и переходя к пределу при $h\to 0$ (существование предела следует из дифференцируемости $P_{ii}(t)$ и $P_{ij}(t)$), получим

$$\lim_{h\to 0}R_{ij}(h)=\lim_{h\to 0}\frac{P_{ij}(h)/h}{(1-P_{ii}(h))/h}=\frac{q_{ij}}{q_i}=p_{ij}.$$

Итак, вероятность того, что цепь, покидая состояние i, перейдет в состояние j равна

$$p_{ij}=\frac{q_{ij}}{q_i}.$$

Например, для процесса рождения и гибели вероятность p_{ij} того, что цепь, покидая состояние i, перейдет в состояние j, равна

$$p_{i,i+1}=\lim_{h\to 0}R_{i,i+1}(h)=\frac{q_{i,i+1}}{q_i}=\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i},$$

$$p_{i,i-1}=\lim_{h\to 0}R_{i,i-1}(h)=\frac{q_{i,i-1}}{q_i}=\frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i},$$

для $j\neq i-1,i+1$ значения

$$p_{i,j}=\lim_{h\to 0}R_{i,j}(h)=\frac{q_{i,j}}{q_i}=0,$$

см. также пример 3.5.1 (с. 173).

Структура марковской цепи с непрерывным временем описывается следующим утверждением.

Стационарная марковская цепь $\{\xi(t),t\in[0;\infty),\xi(0)=i\}$, стартовав в момент времени $t=0$ из состояния i, пребывает в i случайное время τ_i, имеющее показательное распределение с параметром $q_i=-P'_{ii}(0)$.

По окончании времени пребывания цепи в состоянии i цепь, уходя из состояния i, переходит в состояние $j\neq i$ с вероятностью $p_{ij}=q_{ij}/q_i$ и пребывает в состоянии j случайное время τ_j, имеющее показательное распределение с параметром q_j, и т. д.

Определение. Пусть $\{\xi(t),t\in[0;\infty)\}$ — стационарная марковская цепь с непрерывным временем и фазовым пространством $X=\{0,1,2,\ldots\}$, $p_{ij}=q_{ij}/q_i$ — вероятность перехода из состояния i в состояние j ($j \neq i$) по истечении времени пребывания τ_i цепи в состоянии i. Марковскую цепь $\{\xi_n\}$ с дискретным временем, фазовым пространством X и матрицей переходных вероятностей

$$[p_{ij}],\ i, j \in X,\ p_{ii} = 0,\ i \in X,$$

будем называть *вложенной марковской цепью* стационарной марковской цепи $\{\xi(t), t \in [0; \infty)\}$.

Матрицу $[p_{ij}]$ называют *матрицей переходных вероятностей вложенной марковской цепи.*

Определение. Числа ν_{ij} $(i, j = 0, 1, 2, \ldots)$, определяемые равенством

$$\nu_{ij} = \begin{cases} -q_i, & \text{если } j = i, \\ q_{ij}, & \text{если } j \neq i, \end{cases}$$

называются *инфинитезимальными интенсивностями перехода* марковской цепи $\{\xi(t), t \in [0; \infty)\}$ с непрерывным временем, а матрицу $\boldsymbol{\nu} = [\nu_{ij}]$ называют матрицей инфинитезимальных характеристик.

Матрица инфинитезимальных характеристик задает марковскую цепь: $\nu_{ii} = q_i$ — параметр показательного распределения времени пребывания цепи в состоянии i, а $p_{ij} = q_{ij}/q_i$ — вероятность перехода из состояния i в состояние j ($j \neq i$).

Заметим, что матрица инфинитезимальных характеристик

$$\boldsymbol{\nu} = \mathbb{P}'(0).$$

3.7 Обратные дифференциальные уравнения Колмогорова

Определение. Марковскую цепь $\{\xi(t), t \in [0; \infty)\}$ с непрерывными в нуле переходными вероятностями будем называть *консервативной*, если для всех i

$$\sum_{j:j\neq i} q_{ij} = q_i \ \ (0 < q_i < \infty). \tag{3.7.1}$$

Другими словами, марковская цепь консервативна, если для всех i

$$\sum_{j:j\neq i} p_{ij} = 1.$$

Эквивалентность определений следует из равенств $p_{ij} = q_{ij}/q_i$, $i, j = 0, 1, 2, \ldots$

П р и м е р 3.7.1. *Процесс рождения и гибели консервативен, поскольку*

$$q_{i,i+1} = \lambda_i,\ q_{i,i-1} = \mu_i,\ q_{ij} = 0,\ j \neq i,\ j \neq i-1,\ j \neq i+1,$$

$$q_i = \lambda_i + \mu_i.$$

Т е о р е м а 3.7.1 (обратные уравнения Колмогорова). *В консервативной цепи Маркова переходные вероятности $P_{ij}(t)$ удовлетворяют обратным дифференциальным уравнениям Колмогорова:*

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k:k\neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - q_i P_{ij}(t) \tag{3.7.2}$$

для всех $i, j = 0, 1, 2, \ldots$; в матричном виде

$$\mathbb{P}'(t) = \boldsymbol{\nu}\mathbb{P}(t),$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — инфинитезимальная матрица.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из уравнения Колмогорова–Чепмена имеем

$$P_{ij}(h+t) - P_{ij}(t) = \sum_k P_{ik}(h) P_{kj}(t) - P_{ij}(t) =$$

$$= \sum_{k:k\neq i} P_{ik}(h) P_{kj}(t) + (P_{ii}(h) - 1) P_{ij}(t).$$

Отсюда

$$\frac{P_{ij}(h+t) - P_{ij}(t)}{h} = \sum_{k:k\neq i} \frac{P_{ik}(h)}{h} P_{kj}(t) + \frac{P_{ii}(h) - 1}{h} P_{ij}(t).$$

Формально переходя к пределу при $h \to 0+0$, причем в правой части под знаком суммы, для всех i, j, получим

$$P'_{ij}(t) = \sum_{k:k\neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - q_i P_{ij}(t).$$

Для обоснования предельного перехода установим, что

$$\sum_{k:k\neq i} q_{ik} P_{kj}(t) \leq \varliminf_{h\to 0+0} \frac{1}{h} \sum_{k:k\neq i} P_{ik}(h) P_{kj}(t) \leq$$

$$\leq \varlimsup_{h\to 0+0} \frac{1}{h} \sum_{k:k\neq i} P_{ik}(h)P_{kj}(t) \leq \sum_{k:k\neq i} q_{ik}P_{kj}(t).$$

Для любого N

$$\frac{1}{h} \sum_{k=1,\, k\neq i}^{N} P_{ik}(h)P_{kj}(t) \leq \frac{1}{h} \sum_{k:k\neq i} P_{ik}(h)P_{kj}(t).$$

Отсюда

$$\sum_{k=1,\, k\neq i}^{N} q_{ik}P_{kj}(t) \leq \varliminf_{h\to 0+0} \frac{1}{h} \sum_{k\neq i} P_{ik}(h)P_{kj}(t),$$

а так как N произвольно, то

$$\sum_{k:k\neq i} q_{ik}P_{kj}(t) \leq \varliminf_{h\to 0+0} \frac{1}{h} \sum_{k:k\neq i} P_{ik}(h)P_{kj}(t). \tag{3.7.3}$$

Докажем теперь, что

$$\varlimsup_{h\to 0+0} \frac{1}{h} \sum_{k:k\neq i} P_{ik}(h)P_{kj}(t) \leq \sum_{k:k\neq i} q_{ik}P_{kj}(t).$$

Пусть N достаточно большое, так что $i \in [0, N)$. Тогда

$$\sum_{k:k\neq i} P_{ik}(h)P_{kj}(t) \leq \sum_{k=1,\, k\neq i}^{N} P_{ik}(h)P_{kj}(t) + \sum_{k=N+1}^{\infty} P_{ik}(h) =$$

$$= \sum_{k=1,\, k\neq i}^{N} P_{ik}(h)P_{kj}(t) + 1 - \sum_{k=1}^{N} P_{ik}(h) =$$

$$= \sum_{k=1,\, k\neq i}^{N} P_{ik}(h)P_{kj}(t) + \Big((1 - P_{ii}(h)) - \sum_{k=1,\, k\neq i}^{N} P_{ik}(h)\Big).$$

Разделив на h и вычислив верхний предел при $h \to 0+0$ от обеих частей, получим

$$\varlimsup_{h\to 0+0} \frac{1}{h} \sum_{k:k\neq i} P_{ik}(h)P_{kj}(t) \leq \sum_{k=1,\, k\neq i}^{N} q_{ik}P_{kj}(t) + \Big(q_i - \sum_{k=1,\, k\neq i}^{N} q_{ik}\Big).$$

При $N \to +\infty$, учитывая, что процесс консервативен (см. (3.7.1)), а, следовательно,

$$q_i - \sum_{k=1,\, k\neq i}^{N} q_{ik} \to 0,$$

получаем

$$\varlimsup_{h\to 0+0} \frac{1}{h} \sum_{k:k\neq i} P_{ik}(h)P_{kj}(t) \le \sum_{k:k\neq i} q_{ik}P_{kj}(t).$$

Из последнего неравенства и неравенства (3.7.3) следует, что, во-первых, существует

$$\lim_{h\to +0} \frac{1}{h} \sum_{k:k\neq i} P_{ik}(h)P_{kj}(t),$$

и, во-вторых, он равен $\sum\limits_{k:k\neq i} q_{ik}P_{kj}(t)$.

Тем самым теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Переходные вероятности $P_{ij}(t)$ консервативной марковской цепи удовлетворяют системе обратных дифференциальных уравнений (3.7.2) и без предположения консервативности, но последнее делает доказательство теоремы особенно простым.

3.8 Примеры и задачи

Примеры

П р и м е р 3.8.1 (цепь с двумя состояниями). *Пусть* $\{\xi(t), t \in [0,\infty)\}$ — *стационарная марковская цепь с непрерывным временем и фазовым пространством* $X = \{0;1\}$.

Найти $P_{ij}(t),\ i,j = 0,1$, *по известным* q_0 *и* q_1, *если состояния цепи ненулевые, т. е.* $q_0 > 0$ *и* $q_1 > 0$, *и не мгновенные, т. е.* $q_0 \neq \infty$ *и* $q_1 \neq \infty$.

Р е ш е н и е. Поскольку фазовое пространство $X = \{0;1\}$ состоит из двух состояний и состояния ненулевые — цепь не остается в состояниях 0 и 1, то вероятности перехода во вложенной цепи равны:

$$p_{01} = 1,\ p_{10} = 1.$$

Далее,

$$p_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i},\ j \neq i,$$

поэтому
$$p_{01} = \frac{q_{01}}{q_0},\ p_{10} = \frac{q_{10}}{q_1},$$
а т. к.
$$p_{01} = 1,\ p_{10} = 1,$$
то
$$q_{01} = q_0,\ q_{10} = q_1$$
и, следовательно, матрица инфинитезимальных характеристик
$$\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} -q_0 & q_{01} \\ q_{10} & -q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_0 & q_0 \\ q_1 & -q_1 \end{bmatrix}.$$

Переходные вероятности $P_{ij}(t), i, j = 0, 1$, найдем как решения обратных дифференциальных уравнений Колмогорова:
$$\mathbb{P}'(t) = \boldsymbol{\nu}\mathbb{P}(t),$$
подробнее
$$P'_{00}(t) = -q_0 P_{00}(t) + q_0 P_{10}(t), \tag{3.8.4}$$
$$P'_{01}(t) = -q_0 P_{01}(t) + q_0 P_{11}(t), \tag{3.8.5}$$
$$P'_{10}(t) = q_1 P_{00}(t) - q_1 P_{10}(t), \tag{3.8.6}$$
$$P'_{11}(t) = q_1 P_{01}(t) - q_1 P_{11}(t), \tag{3.8.7}$$
с начальными условиями
$$P_{ij}(0) = \delta_{ij},\ i, j = 0, 1. \tag{3.8.8}$$

Поскольку
$$P_{00}(t) + P_{01}(t) = 1,\ P_{10}(t) + P_{11}(t) = 1, \tag{3.8.9}$$
то для решения системы уравнений (3.8.4) – (3.8.7) достаточно найти $P_{00}(t)$ и $P_{10}(t)$, решив систему уравнений (3.8.4) и (3.8.6). Вычитая уравнение (3.8.6) из уравнения (3.8.4), получим:
$$(P_{00}(t) - P_{10}(t))' = -(q_1 + q_0)(P_{00}(t) - P_{10}(t)). \tag{3.8.10}$$
Решением последнего дифференциального уравнения при начальном условии
$$P_{00}(0) - P_{10}(0) = 1$$

является
$$P_{00}(t) - P_{10}(t) = e^{-(q_0+q_1)t}. \qquad (3.8.11)$$
Подставляя в (3.8.4), получим:
$$P'_{00}(t) = -q_0 e^{-(q_0+q_1)t}.$$
Откуда
$$\int_0^t P'_{00}(s)ds = -\int_0^t q_0 e^{-(q_0+q_1)s} ds,$$
$$P_{00}(t) = P_{00}(0) - \frac{q_0}{q_0+q_1}(1 - e^{-(q_0+q_1)t}).$$
Итак,
$$P_{00}(t) = \frac{q_1}{q_0+q_1} + \frac{q_0}{q_0+q_1} e^{-(q_0+q_1)t},\ t \geq 0.$$

По $P_{00}(t)$ находим оставшиеся $P_{ij}(t)$.

Подставив выражение для $P_{00}(t)$ в равенство (3.8.11), находим, что
$$P_{10}(t) = \frac{q_1}{q_0+q_1} - \frac{q_1}{q_0+q_1} e^{-(q_0+q_1)t},\ t \geq 0.$$

Наконец, из (3.8.9) получаем, что
$$P_{01}(t) = 1 - P_{00}(t) = \frac{q_0}{q_0+q_1} - \frac{q_0}{q_0+q_1} e^{-(q_0+q_1)t},\ t \geq 0,$$
$$P_{11}(t) = 1 - P_{10}(t) = \frac{q_0}{q_0+q_1} + \frac{q_1}{q_0+q_1} e^{-(q_0+q_1)t},\ t \geq 0.$$

Из найденных представлений для $P_{ij}(t),\ i,j = 0,1$, получаем
$$\lim_{t\to\infty} P_{i0}(t) = \frac{q_1}{q_0+q_1},\ i = 0,1,$$
$$\lim_{t\to\infty} P_{i1}(t) = \frac{q_0}{q_0+q_1},\ i = 0,1.$$

Пример 3.8.2. *Пусть* $\{\xi(t), t \in [0,\infty), \xi(0) = 0\}$ — *процесс чистого рождения, стартующий из* 0 *с фазовым пространством* $X = \{0,1,2,\ldots\}$ *и положительными интенсивностями роста* λ_k.

Вероятности пребывания $P_k(t) = P\{\xi(t) = k\},\ k = 0, 1, 2, \ldots$ *удовлетворяют системе дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda P_0(t), \\ P_k'(t) = -\lambda_k P_k(t) + \lambda_{k-1} P_{k-1}(t),\ k \geq 1. \end{cases} \tag{3.8.12}$$

Система (3.8.12) *имеет единственное решение* $\{P_k(t)\}$, *удовлетворяющее соотношениям*

$$P_k(t) \geq 0,\ \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \leq 1.$$

Показать, что если

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1 \quad \text{при всех} \quad t > 0,$$

то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \tag{3.8.13}$$

расходится.

Решение. Из (3.8.12) получаем:

$$\lambda_k P_k(t) = -P_k'(t) + \lambda_{k-1} P_{k-1}(t). \tag{3.8.14}$$

Пользуясь рекуррентным соотношением (3.8.14), имеем:

$$\lambda_k P_k(t) = -P_k'(t) + \lambda_{k-1} P_{k-1}(t) =$$

$$= -P_k'(t) - P_{k-1}'(t) + \lambda_{k-2} P_{k-2}(t) = \ldots = -\sum_{j=0}^{k} P_j'(t).$$

Интегрируя последнее равенство, получаем:

$$\lambda_k \int_0^t P_k(s) ds = \left(-\sum_{j=0}^{k} P_j(s) \right) \Bigg|_0^t =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} (P_j(0) - P_j(t)) = 1 - \sum_{j=0}^{k} P_j(t),$$

(воспользовались тем, что процесс стартует из нуля: $P_0(0) = 1, P_j(0) = 0, j = 1, 2, \ldots$) или

$$0 \le \sum_{j=0}^{k} P_j(t) = 1 - \lambda_k \int_0^t P_k(s)ds.$$

Отсюда имеем

$$\int_0^t P_k(s)ds \le \frac{1}{\lambda_k}. \tag{3.8.15}$$

Предположим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1.$$

Сложив почленно неравенства (3.8.15) ($k = 0, 1, 2, \ldots$) и воспользовавшись теоремой Лебега о монотонной сходимости, получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \ge \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t P_k(s)ds = \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} P_k(s)ds = \int_0^t 1dt = t$$

при всех $t > 0$, что доказывает расходимость ряда (3.8.13).

В случае же, когда ряд (3.8.13) сходится, для некоторого t_0

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t_0) \ne 1,$$

т. е. в момент времени t_0 мы имеем дело с парадоксальной ситуацией (ведь события $\{\xi(t_0) = k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ образуют полную группу событий и сумма их вероятностей обязана равняться 1). Объяснить это явление можно так: при достаточно быстро стремящихся к бесконечности интенсивностях роста λ_k (настолько быстро, что ряд (3.8.13) сходится) размер популяции может за конечное время T вырости до бесконечности (так называемый взрыв) и процесс при $t > T$ не определен.

Задачи

Задача 3.1. Выписать обратные дифференциальные уравнения Колмогорова для процесса чистого рождения.

Ответ:

$$\mathbb{P}'(t) = \boldsymbol{\nu}\mathbb{P}(t),$$

где

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Задача 3.2. Доказать, что для любого состояния i марковской цепи с непрерывным временем вероятность возвращения в исходное состояние $P_{ii}(t)$ строго больше нуля при всех $t > 0$.

Указание. Воспользоваться уравнением Колмогорова-Чепмена.

Задача 3.3. Пусть i, j — два состояния марковской цепи с непрерывным временем и существует t_0 такое, что $P_{ij}(t_0) > 0$. Доказать, что $P_{ij}(t) > 0$ для любого $t > 0$.

Указание. Воспользоваться формулой Колмогорова-Чепмена.

Задача 3.4. Доказать, что для процесса чистого рождения переходные вероятности удовлетворяют соотношению

$$P_{i,j}(t) = \lambda_{j-1}\, e^{-\lambda_j t} \int\limits_0^t e^{\lambda_j s} P_{i,j-1}(s)ds,\ j > i.$$

Указание. Воспользоваться прямыми дифференциальными уравнениями.

Задача 3.5. Пусть $\xi(t)$ — процесс чистого рождения с интенсивностями роста $\lambda_0 = 1, \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$. Найти $P_{0,n}(t)$ при $n = 0, 1, 2, 3$.

Задача 3.6. Пусть $\xi(t)$ — пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda = 5$. Найти:

$$1) P\{\xi(3) = 8,\ \xi(7) = 12\};\ 2) P\{\xi(3) = 3,\ \xi(6) = 5\}.$$

Задача 3.7. Пусть $\xi(t)$ — пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda = 7$. Найти

$$P\{\xi(3) = 8 \,|\, \xi(10) = 22\}.$$

Литература

[1] *Боровков А. А.* Курс теории вероятностей / А. А. Боровков. — М. : Наука, 1972. — 288 с.

[2] *Гихман И. И.* Теория вероятностей и математическая статистика / И. И. Гихман, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. — К. : Вища шк. Головное изд-во, 1979. — 320 с.

[3] *Гнеденко Б. В.* Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. — М. : Наука, 1966. — 432 с.

[4] *Зубков А. М.* Сборник задач по теории вероятностей: учеб. пособие для вузов / А. М. Зубков, Б. А. Севастьянов, В. В. Чистяков. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 320 с.

[5] *Карлин С.* Основы теории случайных процессов / С. Карлин. — М. : Мир, 1971. — 536 с.

[6] *Мешалкин Л. Д.* Сборник задач по теории вероятностей / Л. Д. Мешалкин. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1963. — 155 с.

[7] *Миллер Б. М.* Теория случайных процессов в примерах и задачах / Б. М. Миллер, А. Р. Панков. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 320 с.

[8] *Розанов Ю. А.* Случайные процессы / Ю. А. Розанов. — М. : Наука, 1971. — 288 с.

[9] *Скороход А. В.* Элементы теории вероятностей и случайных процессов / А. В. Скороход. — К. : Вища школа, 1980. — 344 с.

[10] *Теория вероятностей: Сб. задач.* / А. Я. Дороговцев, Д. С. Сильвестров, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. — К. : Вища шк. Головное изд-во, 1980. — 432 с.

[11] *Турчин В. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / В. Н. Турчин. — Д. : Изд-во Днепропетр. ун-та, 2008. — 656 с.

[12] *Тутубалин В. Н.* Теория вероятностей и случайных процессов / В. Н. Тутубалин. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1992. — 400 с.

[13] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2 т. / В. Феллер. — 3-е изд. — М. : Мир, 1984. — Т.1. — 527 с.; Т.2. — 751 с.

[14] *Ширяев А. Н.* Вероятность / А. Н. Ширяев. — М. : МЦНМО, 2004. — Т.1. — 520 с.; Т.2. — 408 с.

[15] *Bhattacharya R. N.* Stochastic Processes with Applications / R. N. Bhattacharya, E. C. Waymire. — Philadelphia: SIAM, 2009. — 676 p.

[16] *Chung K. L.* Markov Chains with Stationary Transition Probabilities / K. L. Chung. — Berlin: Springer-Verlag, 1960. — 278 p.

[17] *Lefebvre M.* Applied Stochastic Processes / M. Lefebvre. — N.Y.: Springer Science+Business Media LLC, 2007. — 382 p.

[18] *Norris J. R.* Markov Chains / J. R. Norris. — Cambridge: Cambridge University Press, 1997. — 238 p.

[19] *Parzen E.* Stochastic Processes / E. Parzen. — San Francisco: Holden-Day, 1962. — 324 p.

[20] *Privault N.* Understanding Markov Chains / N. Privault. — Singapore: Springer, 2013. — 354 p.

[21] *Resnick S.* Adventures in Stochastic Processes / S. Resnick. — Boston: Birkhäuser, 2005. — 626 p.

[22] *Stirzaker D.* Stochastic Processes and Models / D. Stirzaker. — Oxford: Oxford University Press, 2005. — 332 p.

Оглавление

Навчальне видання

Турчин Валерій Миколайович
Турчин Євген Валерійович

МАРКОВСЬКІ ЛАНЦЮГИ

Основні поняття, приклади, задачі

Навчальний посібник
для студентів
вищих навчальних закладів

(російською мовою)

Редактор Ю.В. Козаченко
Художник К.Д. Ткаченко
Оригінал-макет В.М. Турчин

Підписано до друку 01.02.2016 р.
Формат 84×108/32. Ум. друк. арк. 10,08.
Тираж 300 прим. Зам. № 010216.

Видавництво і друкарня ТОВ «ЛізуновПрес»
49127, м. Дніпропетровськ, вул. Немировича-Данченка, 30/166.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
серія ДК № 3597 від 06.10.2009 р.

Віддруковано з готового авторського оригінал-макета
(із прав. на с. 1, 2, 3, 191, 192)

ТУРЧИН
Валерий Николаевич

Автор 107 научных и научно-методических работ,
14 учебников и учебных пособий по теории вероятностей и математической статистике.
Заведующий кафедрой статистики и теории вероятностей Днепропетровского национального университета имени Олеся Гончара.

ТУРЧИН
Евгений Валериевич

Автор 27 научных и научно-методических работ,
2 учебных пособий по теории вероятностей и математической статистике.
Доцент кафедры статистики и теории вероятностей Днепропетровского национального университета имени Олеся Гончара.