

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Механіко-математичний факультет

Кафедра статистики й теорії ймовірностей

100 років

*Дніпровському національному університету імені Олеся Гончара
(1918–2018)*

Гончаров С. В.

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
ІЗ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ
ДЛЯ СТУДЕНТІВ
ФІЗИЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Дніпро
Видавець Біла К. О.
2018

*Рекомендовано до друку
Вченою радою механіко-математичного факультету
Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара
(протокол № 8 від 27.03.2018)*

Рецензенти:

Послайко Н. І., канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри прикладної математики Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна;

Руденко О. О., канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри математичного аналізу і теорії функцій Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.

Гончаров С. В.

Г 65 Конспект лекцій із теорії ймовірностей для студентів фізичних спеціальностей / С. В. Гончаров. – Дніпро : Видавець Біла К. О., 2018. – 40 с.

Посібник містить лекції з курсу теорії ймовірностей. Лекції охоплюють наступні теми: елементи комбінаторики, стохастичний експеримент та його математична модель, класична модель, умовна ймовірність, дискретна випадкова величина, математичне сподівання та дисперсія, схема незалежних випробувань, одновимірні дискретні розподіли.

Для студентів факультету фізики, електроніки та комп'ютерних систем ДНУ напрямів підготовки «Фізика», «Прикладна фізика».

УДК 519.2

Зміст

Вступ	4
1. Елементи комбінаторики	5
2. Стохастичний експеримент і його математична модель	11
2.1. Алгебра подій. Елементарні події	11
2.2. Ймовірність	14
3. Властивості ймовірності	16
4. Дискретний ймовірнісний простір	17
4.1. Класична модель	18
5. Умовна ймовірність	18
6. Незалежні події	20
7. Дискретна випадкова величина	22
7.1. Розподіл дискретної випадкової величини	23
7.2. Форми запису розподілу випадкової величини	23
7.3. Розподіл функції від випадкової величини	24
7.4. Незалежні випадкові величини	25
7.5. Спільний розподіл незалежних випадкових величин	26
8. Математичне сподівання (дискретний випадок)	27
8.1. Властивості математичного сподівання	27
8.2. Дисперсія випадкової величини	30
9. Схема незалежних випробувань	32
9.1. Випробування Бернуллі	32
9.2. Біномний розподіл	33
9.3. Граничні теореми для біномного розподілу	33
10. Дискретні розподіли на $\mathbb{R}^1$	35
Позначення	39
Список рекомендованої літератури	39

Вступ

«При підкиданні симетричної монети ймовірність випадання герба — $\frac{1}{2}$ ».

Усі ми маємо власне, інтуїтивне розуміння цих слів:

- коли підкинути монету 100 разів, то десь у 50 випадках з'явиться герб;
- решітка випадає з тою самою ймовірністю;
- перед підкиданням неможливо передбачити його результат;

ми сприймаємо ці твердження як «вірні», вони узгоджуються з нашим досвідом. Складніше питання: якщо підкинути 7 симетричних монет, яка ймовірність того, що гербів випаде більше, ніж решіток?

Позначимо її p . Оскільки монети симетричні, їх можна перекарбувати, помінявши місцями герби й решітки. Тому ймовірність того, що випаде більше решіток, ніж гербів, така сама — p . Склавши ці ймовірності, матимемо ймовірність того, що відбувається завжди. Тобто $2p = 1$, звідки $p = \frac{1}{2}$.

Але «наочний» досвід досить обмежений. Трохи змінимо умову задачі — нехай підкидають 8 монет — що тоді? Тепер гербів і решіток може випасти однакова кількість, і як знайти ймовірність такої події?

Такі питання виникають не тільки в іграх. Хоча вважається, що теорія ймовірностей починала свій розвиток саме з аналізу азартних ігор — у XVII ст. цими проблемами цікавились Паскаль, Ферма і Гюйгенс, трактат якого «Про розрахунок в азартній грі» опубліковано 1657 р. У 1713 році опубліковано (посмертно) трактат Якоба Бернуллі, який включав роботу Гюйгенса і називався «Мистецтво припущення».

Після Лапласа (який написав «Аналітичну теорію ймовірностей») і Гаусса інтерес до «теорії про ймовірності» дещо зменшився. Означення і поняття, що використовували тоді, описували лише вузький клас явищ, і основні питання щодо них у вказаних роботах вже були розв'язані. Наступний етап розвитку — кінець XIX ст., результати Чебишова, Маркова, Ляпунова.

На початку XX ст. постає проблема основ теорії ймовірностей — загальних структур, математичних об'єктів, на яких, наче на підвалинах, можна побудувати теорію, що здатна описати й моделювати різноманітні випадкові явища, залишаючись «строгою», математично коректною. До цього періоду відносяться роботи Мізеса, Бернштейна, Хінчина, Колмогорова. І ось у 1933 р. з'явилась книга Колмогорова «Основні поняття теорії ймовірностей», де запропоновано аксіоматику цієї теорії, яка стала загальноприйнятою.

І ми відтворюватимемо теорію ймовірностей саме в рамках цієї моделі.

Наприкінці даного курсу ви розумітимете новий аспект явищ, котрі відбуваються навколо, причини рішень, які люди приймають щодо цих явищ, вже на новому, більш чіткому рівні. Зможете відповідати на питання: про ті ж монети, кубики (тільки складніші), про безпеку приладів, очікування подій, аналізувати поведінку різноманітних систем.

1. Елементи комбінаторики

РЕС. Множини позначають великими літерами A, B, X, Ω ; якщо елемент x належить множині A , пишемо $x \in A$, якщо ні — $x \notin A$. Якщо всі елементи множини A належать множині B , говоримо, що A є підмножиною B , і пишемо $A \subseteq B$ або $B \supseteq A$. За означенням, $A = B$, коли $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$. Якщо $A \subseteq B$, але $A \neq B$, пишемо $A \subset B$ (у деяких текстах символ $\subset$ означає $\subseteq$). Основні операції над множинами — об'єднання ($A \cup B$), перетин ($A \cap B$), різниця ($A \setminus B$), симетрична різниця ($A \Delta B$). Коли $A \subseteq B$, доповненням A (до B /в B), називають множину $B \setminus A$, яку позначають $C_B A$. Якщо із контексту зрозуміло, яку множину B маємо на увазі, пишемо $C A$ чи $\bar{A}$.

ОЗН. Скінченну множину, яка містить рівно n елементів, називають n -елементною. Кількість елементів у скінченній множині A позначаємо $n(A)$.

ОЗН. n -елементна множина A називається *упорядкованою*, якщо встановлена певна взаємно однозначна відповідність між множиною A та множиною $\{1; 2; \dots; n\}$ всіх натуральних чисел від 1 до n .

Іншими словами, елементи множини A пронумеровані. Також можна уявляти, що ці елементи виклали у ряд. Упорядковану множину ще називають *набором*, або (скінченною) *послідовністю*.

2 впорядковані множини вважаються різними, якщо вони відрізняються складом своїх елементів або їх порядком. Отже, $(a; b; c; d)$ і $(a; d; c; b)$ — різні впорядковані множини; $(d; c; b; a)$ і $(a; b; c; d; e; f)$ — тим більше.

Позначення для неупорядкованої множини — список її елементів, взятий у фігурні дужки, $\{a; b; c; d\}$. Для впорядкованої — список елементів у круглих дужках, $(b; c; a; d)$: b на першому місці, c на другому і т.д.

ОЗН. *Декартовим добутком* множин A і B називають множину $A \times B$, яка складається з усіх упорядкованих пар виду $(a; b)$, де $a \in A$, $b \in B$.

Наприклад, для множин $A = \{a; b; c\}$ і $B = \{1; *\}$

$$A \times B = \{(a; 1); (a; *); (b; 1); (b; *); (c; 1); (c; *)\}$$

Відмітимо, що $B \times A = \{(1; a); (*; a); \dots; (*; c)\} \neq A \times B$.

ОЗН. *Декартовим добутком* множин $A_1, A_2, \dots, A_n$ називають множину $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ усіх наборів виду $(a_1; a_2; \dots; a_n)$, де a_i пробігає A_i , $i = \overline{1, n}$.

ТЕОР. (Правило множення/Основний принцип комбінаторики). Нехай A і B — скінченні множини. Тоді $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$.

◀ Пронумеруємо елементи $A: a_1, a_2, \dots, a_{n(A)}$, і $B = \{b_1; b_2; \dots; b_{n(B)}\}$. Усі пари $(a; b)$ з $A \times B$ запишемо у вигляді таблиці з $n(A)$ рядків та $n(B)$ стовпчиків, де в i -му рядку перелічені всі пари з першим елементом a_i , а у j -му стовпчику — всі пари з другим елементом b_j . Очевидно, що усього клітинок в таблиці (а значить, і пар $(a; b)$) буде $n(A) \cdot n(B)$ ▶

ТЕОР. Нехай $A_1, A_2, \dots, A_n$ — скінченні множини. Тоді

$$n(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = n(A_1) \cdot n(A_2) \times \dots \times n(A_n)$$

Сформулюємо правило множення у термінах дій. Нехай потрібно виконати одну за одною k дій, причому 1-у можна виконати n_1 способами, 2-у — n_2 способами, ..., k -у — n_k способами. Тоді виконати ці k дій у вказаному порядку можна $n_1 n_2 \times \dots \times n_k$ способами.

ПР. Нехай треба проїхати з міста A через місто B до міста C . З A до B веде 5 доріг, а з B до C — 7. Повна дія складається із двох: першу — подорож з A до B — можна виконати 5-ма способами, другу — подорож з B до C — 7-ма. За правилом множення/за основним принципом комбінаторики повну дію можна виконати $5 \cdot 7 = 35$ способами.

Із елементів скінченних множин можна складати інші структури. Деякі з них мають важливе значення, часто зустрічаються в різних задачах, і треба знати їхні особливості, зокрема, вміти їх рахувати. Їх можна назвати стандартними комбінаторними об'єктами. Розглянемо декілька таких об'єктів.

РЕС. Факторіалом n називають число $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \times \dots \times n$. Також $0! = 1$. Факторіали перших натуральних чисел: $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$.

ОЗН. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$. Розміщенням з n елементів по k називають упорядковану k -елементну підмножину даної n -елементної множини. 2 розміщення з n елементів по k вважають різними, якщо вони відрізняються складом своїх елементів або їх порядком.

ПР. $A = \{a; b; c; d\}$. Перелічимо всі розміщення з 4 елементів A по 2: $(a; b), (b; a), (a; c), (c; a), (a; d), (d; a), (b; c), (c; b), (b; d), (d; b), (c; d), (d; c)$.

Всього 12 наборів. Припустимо, ми виписуємо їх; можна перевірити, що всі різні, але як переконатись, що нічого не пропустили? З цієї причини, та й саме по собі, виникає питання про кількість розміщень з n по k .

ТВ. Кількість всіх розміщень з n по k ,

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \times \dots \times (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

◀ Кожне розміщення з n елементів множини A по k — це спосіб розставити на k пронумерованих місцях певні k елементів множини A : розміщення $(a_1; a_2; \dots; a_k)$ означає, що на першому місці стоїть елемент a_1 , і т.д., на k -му — a_k . Тобто існує взаємно однозначна відповідність між розміщеннями з n по k та способами виконати таку дію. Значить, кількість розміщень з n по k дорівнює кількості таких способів. Порахуємо її. Ця дія складається із k : перша — вибрати елемент A , що буде стояти на першому місці, її можна виконати n способами, друга — вибрати елемент A із тих, що залишились після вибору першого, який буде стояти на другому місці — виконується $n - 1$ способами, і так далі. Останню дію, вибір елемента, що стоятиме на k -му місці, можна виконати $n - (k - 1)$ способом. Тому за правилом множення повну дію можна виконати $n(n - 1) \times \dots \times (n - (k - 1))$ способами. Домноживши обидві частини цієї рівності на $(n - k)!$, матимемо: $(n - k)! \cdot A_n^k =$
 $= n(n - 1) \times \dots \times (n - (k - 1)) \cdot (n - k)(n - k - 1) \times \dots \times 2 \cdot 1 = n!$
звідки $A_n^k = \frac{n!}{(n - k)!}$. ▶

Перевіримо це на розглянутому прикладі: $n = 4$, $k = 2$, $A_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$.

ОЗН. *Перестановкою n -елементної множини називають розміщення з n елементів цієї множини по n , тобто ту саму множину, тільки упорядковану.*

ТВ. Кількість всіх перестановок n -елементної множини, $P_n = n!$.

ОЗН. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$. *Сполукою з n елементів по k називають неупорядковану k -елементну підмножину даної n -елементної множини. 2 сполуки з n елементів по k вважають різними, якщо вони відрізняються складом своїх елементів (порядок не має значення).*

Візьмемо знов $A = \{a; b; c; d\}$ і знайдемо всі сполуки з 4 по 2:

$$\{a; b\}, \{a; c\}, \{a; d\}, \{b; c\}, \{b; d\}, \{c; d\}.$$

6 сполук. Відповімо на аналогічне питання.

ТВ. Кількість всіх сполук з n по k , $C_n^k = \frac{n!}{k!(n - k)!}$.

◀ Візьмемо n -елементну множину A та порахуємо кількість її перестановок. Вже знаємо, що їх $P_n = n!$. Представимо цю кількість по-іншому.

Розглянемо множину з n місць, пронумерованих числами від 1 до n . Формуватимемо перестановку, послідовно виконуючи 3 наступні дії:

1) Вибираємо k -елементну підмножину множини A . Це можна зробити C_n^k способами (поки невідомо, чому дорівнює ця величина).

2) Розставляємо вибрані k елементів на перших k місцях, тобто місцях з номерами 1 – k . Таким чином, утворюємо перестановку k -елементної множини — це можна зробити $P_k = k!$ способами.

3) Розставляємо решту $n - k$ елементів на решті $n - k$ місць — аналогічно, цю дію можна виконати $P_{n-k} = (n - k)!$ способами.

Тепер перестановка повністю визначена. За правилом множення кількість таких перестановок — кількість способів виконати дії 1-2-3 — дорівнює $C_n^k \cdot k! \cdot (n - k)!$. З іншого боку, це $n!$. Звідси й отримуємо: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. ►

Перевірка: $C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{4} = 6$.

ОЗН. Величину C_n^k (інше позначення — $\binom{n}{k}$) називають *біномним коефіцієнтом*. За означенням, $C_n^0 = 1$, $C_n^1 = n$, $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$, $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

ПР. Бінарні коди (БК). Скільки існує БК довжини n , які містять рівно k одиниць? Візьмемо множину $A = \{1; 2; \dots; n\}$ номерів місць, на яких розміщені символи БК довжини n . Кожному з кодів, що містить рівно k «1», відповідає k -елементна підмножина номерів місць з «1», і ця відповідність бієктивна. Тому шукана кількість кодів — це кількість сполук з n по k , C_n^k .

ОЗН. Нехай $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$. Розміщенням з повтореннями (словом) із m елементів по n називають упорядкований набір довжини n , кожен елемент якого (літера) є одним із елементів даної m -елементної множини (алфавіту).

Нехай множина $A = \{a; b; c\}$ — алфавіт. Тоді словами довжини 2 будуть $(a; a)$, $(a; b)$, $(a; c)$, $(b; a)$, $(b; b)$, $(b; c)$, $(c; a)$, $(c; b)$, $(c; c)$.

Приберемо дужки та розділові знаки: $aa, ab, ac, ba, \dots$

Але кількість таких слів знайти навіть легше, ніж A_n^k та C_n^k :

ТВ. Кількість всіх розміщень з повтореннями із m по n дорівнює m^n .

ОЗН. Нехай $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k_i \leq m$, $i = \overline{1, m}$. Перестановкою з повтореннями (словом) довжини n із k_1 елементів a_1 , k_2 елементів a_2 , ..., k_m елементів a_m , де $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$, називають упорядкований набір довжини n (послідовність довжини n), який містить рівно k_i елементів a_i , $i = \overline{1, m}$. 2 перестановки з повтореннями довжини n (...) вважають різними, якщо вони відрізняються хоча б одним елементом на деякому, j -му, місці.

Випишемо усі слова довжини 3 із 2 елементів « a » та 1 елемента « b »:

$(a; a; b)$, $(a; b; a)$, $(b; a; a)$.

ТВ. Кількість усіх перестановок з повтореннями довжини n (...),

$$C_n(k_1; k_2; \dots; k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \times \dots \times k_m!}$$

◀ Нехай множина літер, алфавіт $A = \{a_1; a_2; \dots; a_m\}$. Візьмемо усі $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ літер і пронумеруємо їх: 1, 2, ..., n так, щоб літери « a_1 » отримали перші k_1 номерів, « a_2 » — наступні k_2 номерів, ..., « a_m » — останні k_m номерів. Таким чином, зробили всі літери розрізненими. Кількість перестановок цих n попарно різних літер дорівнює $P_n = n!$. Представимо цю кількість по-іншому. Будемо формувати перестановку, виконуючи наступні дії:

1) Вважаючи екземпляри однієї літери нерозрізненими, утворюємо із цих n літер слово довжини n ; це можна зробити $C_n(k_1; k_2; \dots; k_m)$ способами.

2) Згадуємо, що зробили їх розрізненими; щоб остаточно сформувати перестановку, треба вказати порядок розташування екземплярів кожної літери:

2.1) Впорядковуємо екземпляри « a_1 » — $P_{k_1} = k_1!$ способів.

2.2) Впорядковуємо екземпляри літери « a_2 » — $P_{k_2} = k_2!$ способів.

...

2.m) Впорядковуємо екземпляри літери « a_m » — $P_{k_m} = k_m!$ способів.

За правилом множення, кількість способів виконати повну дію —

$$C_n(k_1; k_2; \dots; k_m) \cdot k_1! \cdot k_2! \times \dots \times k_m!$$

а з іншого боку, це $n!$, звідки отримуємо шукане твердження. ►

У прикладі $k_1 = 2, k_2 = 1, n = k_1 + k_2 = 3$, і $C_3(2; 1) = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{6}{2} = 3$.

ОЗН. Розбиттям n -елементної множини A на m множин

B_1 , що містить k_1 елементів;

B_2 , що містить k_2 елементів;

...

B_m , що містить k_m елементів (де $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$)

називають представлення A у вигляді $A = \bigcup_{i=1}^m B_i$, де $B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j$.

2 розбиття, $\{B_i^{(1)}\}_{i=1}^m$ та $\{B_i^{(2)}\}_{i=1}^m$, вважають різними, якщо підмножини хоча б однієї пари підмножин цих розбиттів різні, тобто $\exists j : B_j^{(1)} \neq B_j^{(2)}$.

Нехай $A = \{a; b; c\}$. Перелічимо розбиття A на 2 множини: B_1 , що містить 2 елементи, і B_2 , що містить 1 елемент:

$$B_1 = \{a; b\}, B_2 = \{c\}; B_1 = \{a; c\}, B_2 = \{b\}; B_1 = \{b; c\}, B_2 = \{a\}$$

ТВ. Кількість всіх розбиттів n -елементної (...) дорівнює $C_n(k_1; k_2; \dots; k_m)$.

ОЗН. 1. Нехай $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$. Сполукою з повтореннями із m елементів по n називають невпорядкований набір із n елементів, кожен з яких належить одному з m типів. 2 сполуки з повтореннями із m елементів по n вважають різними, якщо вони відрізняються кількістю елементів хоча б одного типу.

Візьмемо множину типів $A = \{a; b; c\}$ (тобто $m = 3$) і випишемо усі сполуки з повтореннями із m по $n = 2$:

$$\{a; a\}, \{b; b\}, \{c; c\}, \{a; b\}, \{a; c\}, \{b; c\}.$$

Отже, сполуку з повтореннями однозначно визначає кількість x_i елементів кожного типу, при цьому $x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$. На відміну від перестановок з повтореннями, ці кількості можна змінювати.

ОЗН. 2. Сполукою з повтореннями із m елементів по n називають послідовність $(x_1; x_2; \dots; x_m)$, де $x_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = \overline{1, m}$, $x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$. x_i — кількість елементів i -го типу.

ТВ. Кількість всіх сполук з повтореннями із m по n , $f_m^n = C_{n+m-1}^{m-1}$.

◀ Використаємо озн. 2 — порахуємо кількість послідовностей $(x_1; x_2; \dots; x_m)$ таких, що $x_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = \overline{1, m}$, і $x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$.

Скористаємось т.з. «методом перегородок». Розглянемо множину бінарних кодів, які складаються із n нулів, «куль» та $m - 1$ одиниць, «перегородок». Кожному такому коду відповідає шукана послідовність: x_1 — кількість «0» перед першою «1», x_2 — кількість «0» між першою та другою «1», ..., x_m — кількість «0» після останньої «1»; і ця відповідність — взаємно однозначна. Отже, шуканих послідовностей стільки ж, скільки таких кодів — $C_{n+(m-1)}^{m-1}$. ▶

У нашому прикладі $m = 3$, $n = 2$, тому $f_3^2 = C_{3+2-1}^{3-1} = C_4^2 = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$.

ТВ. Нехай $n \geq m$. Кількість сполук з повтореннями із m елементів по n , у кожній з яких елемент кожного типу з'являється хоча б 1 раз, $\tilde{f}_m^n = C_{n-1}^{m-1}$.

Останні 2 твердження також визначають кількість розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$ у невід'ємних цілих та натуральних числах відповідно.

2. Стохастичний експеримент і його математична модель

Теорія ймовірностей розглядає т.з. стохастичні експерименти.

Стохастичний експеримент (СЕ) — це експеримент, який:

- відбувається при певних умовах $\mathfrak{S}$;
- результат якого неможливо передбачити до його проведення;
- може бути проведений (реалізований) в принципі будь-яку кількість разів незалежним чином (одні реалізації не впливають на інші).

Прикладами СЕ вважаємо:

- підкидання монети та реєстрація сторони, що випала;
- підкидання 100 гральних кубиків та запис суми очок;
- траєкторія сніжинки;

Приклади не СЕ:

- кладемо монету на стіл гербом догори і записуємо, яка сторона опинилась зверху (немає непередбачуваності);
- після кожного підкидання в монеті просвердлюють дірку (змінюють умови — розподіл маси, експеримент не можна провести багато разів);
- «я проживаю сьогоднішній день, 23.12.2012» (не можна повторити);

Нашою найближчою метою є побудова загальної математичної моделі СЕ.

З кожним СЕ асоціюємо множину подій, які можуть відбутися чи не відбутися у цьому експерименті. Подій, які можна спостерігати, і про які можна однозначно сказати після проведення експерименту:

«така-то подія відбулася» чи «така-то подія не відбулася»

Приклад: СЕ — підкидання 100 гральних кубиків. Тоді «сума очок є простим числом» — подія, вона або відбулася, або ні.

Одні події можна виразити через інші.

2.1. Алгебра подій. Елементарні події

Події позначають $A, B, C, \dots$ Наприклад: «Подія A — випав герб»; це ім'я. Серед усіх подій даного СЕ виділяють 2 особливі події:

- «*неможлива*», V або Λ — не відбувається при жодній реалізації СЕ;
- «*достовірна*», U — відбувається при кожній реалізації СЕ.

Усі неможливі події ототожнюємо і позначаємо V . Усі достовірні — U .

• Якщо події A і B такі, що завжди, коли відбувається подія A , то відбувається і подія B , — говорять, що «*подія B впливає з події A* », і пишуть: $A \subseteq B$ (або $A \subset B$) / $B \supseteq A$ (або $B \supset A$).

Наприклад, у СЕ — підкиданні 100 гральних кубиків — якщо подія A «сума очок ділиться на 35» і подія B «сума очок ділиться на 5», то $A \subseteq B$.

- Якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$, то події A і B вважають нерозрізненими, $A = B$.
- Подію C «відбулася хоча б одна з подій A і B » називають *сумою* подій A і B , $C = A \cup B$ або $C = A + B$.
- Подію C «відбулася і подія A , і подія B » називають *добутком* подій A і B , $C = A \cap B$ або $C = AB$.
- Події A і B називають *несумісними*, якщо $A \cap B = \emptyset$.
- Подію « A не відбулася» називають *протилежною* події A , $\bar{A}$.
- Подію C «подія A відбулася, а подія B не відбулася» називають *різницею* подій A і B , $C = A \setminus B$ або $C = A - B$.
- Подію C «відбулася рівно 1 із подій A і B » називають *симетричною різницею* подій A і B , $C = A \Delta B$.

Операції над подіями зображають на площині *діаграмами Ейлера-В'єнна*.

Клас усіх подій даного СЕ позначаємо $\mathfrak{M}$. Бачимо, що

$$1) A \in \mathfrak{M} \Rightarrow \bar{A} \in \mathfrak{M};$$

$$2) A \in \mathfrak{M}, B \in \mathfrak{M} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{M}.$$

Клас подій, який задовольняє ці 2 властивості, називають *алгеброю подій*.

ОЗН. Нехай $\mathfrak{M}$ — алгебра подій деякого СЕ. Подію $E \in \mathfrak{M}$ називають *елементарною* (ЕП), якщо $\forall A \in \mathfrak{M}: E \subseteq A$ або $E \cap A = \emptyset$.

При підкиданні грального кубика ЕП буде, наприклад, E «випало 4 очки», оскільки будь-яка подія цього СЕ або впливає з E , або несумісна з E . Подія G «кількість очок ділиться на 2» не елементарна, бо подія E не впливає з G і не є несумісною з G ($G \cap E = E$).

Сукупність усіх ЕП даного СЕ — $\mathcal{E}$. Кожну подію A даного СЕ можна описати, задавши певну підмножину $\mathcal{E}$: $A = \{E \in \mathcal{E} \mid E \subseteq A\}$.

Тобто множину тих ЕП, з яких впливає подія A . Значить, кожную подію можна розглядати як підмножину сукупності ЕП.

Перша частина МатМод СЕ — це *MatMod* $\mathcal{E}$. У якості такої моделі розглядаємо будь-яку множину Ω таку, що $\mathcal{E} \xrightarrow{K} \Omega$, тобто між подіями $E \in \mathcal{E}$ і елементами $\omega \in \Omega$ встановлено бієкцію K .

Ω називають *простором елементарних подій* (ПЕП), $\omega \in \Omega$ — *елементарними подіями* (ЕП). Проведення СЕ можна розглядати як випадковий вибір елемента ω з множини Ω .

Ω можна будувати по-різному, але, як правило, елементи Ω мають «математичну» природу, і відображення K теж виникає «природним» чином.

У СЕ — підкиданні грального кубика — моделлю $\mathcal{E}$ є множина $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Але можна було б взяти, наприклад, $\Omega_2 = \{\heartsuit; \infty; \triangle; \clubsuit; \star; *\}$. Тільки якщо ми цікавимося подіями типу «сума очок після 10 підкидань є простим числом», Ω буде легше використовувати. Очки на кубику — числа, і простір елементарних подій відображає це.

Другою частиною МатМод СЕ є *МатМод алгебри подій* $\mathfrak{M}$. Для будь-якої події $A \in \mathfrak{M}$ отримали, що $A = \{E \in \mathcal{E} \mid E \subseteq A\}$. Оскільки встановили бієкцію K між $\mathcal{E}$ та Ω , то події A відповідає множина $K(A)$ образів $K(E) \in \Omega$ тих ЕП $E \in \mathcal{E}$, з яких випливає A :

$$K(A) = \{K(E) \in \Omega \mid E \in \mathcal{E}, E \subseteq A\}$$

Позначимо її K_A . Сукупність усіх K_A для $A \in \mathfrak{M}$ називатимемо $\mathfrak{N}$:

$$\mathfrak{N} = \{K_A \mid A \in \mathfrak{M}\}$$

Це деякий клас підмножин множини Ω , тобто $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{B}(\Omega)$.

РЕС. Нехай X — деяка множина. *Булеаном* множини X , $\mathfrak{B}(X)$, називають множину усіх підмножин множини X . Наприклад, якщо $X = \{a; b\}$, то $\mathfrak{B}(X) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{a; b\}\}$. Для скінченної множини X $n(\mathfrak{B}(X)) = 2^{n(X)}$.

Бієкція K визначає бієктивне відображення між $\mathfrak{M}$ та $\mathfrak{N}$:

$$\mathfrak{M} \ni A \xleftrightarrow{K} K(A) \in \mathfrak{N}$$

Тобто маємо взаємно однозначну відповідність між елементами $\mathfrak{M}$ (подіями СЕ) та елементами $\mathfrak{N}$ (множинами із деякого класу підмножин Ω). Тому їх можна у певному сенсі ототожнювати. Те саме відноситься і до операцій над подіями: сумі подій $A \cup B$ відповідає об'єднання множин $K(A) \cup K(B)$, протилежна до A подія матиме образ $K(\overline{A}) = \overline{K(A)}$ тощо.

($\mathfrak{M}$) Операції над подіями $\leftrightarrow$ Операції над множинами ($\mathfrak{N}$)

А значить, клас множин $\mathfrak{N}$ є алгеброю.

ОЗН. Клас $\mathfrak{N} \neq \emptyset$ підмножин множини X називають *алгеброю*, якщо

- 1) $A \in \mathfrak{N} \Rightarrow \overline{A} = X \setminus A \in \mathfrak{N}$;
- 2) $A \in \mathfrak{N}, B \in \mathfrak{N} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{N}$.

Ця алгебра $\mathfrak{N}$ є МатМод алгебри подій $\mathfrak{M}$ даного СЕ. Елементи $\mathfrak{N}$ — множини ЕП. Зробимо ще один крок — замість $K(A)$, $K(B)$ і т.п. будемо писати просто A , B — називати множини тими ж іменами, що й відповідні події, і називати їх теж подіями.

Оскільки проведення СЕ можна інтерпретувати як випадковий вибір елемента $\omega \in \Omega$, то говорять, що «подія A відбулася», якщо $\omega \in A$, і «подія A не відбулася», якщо $\omega \notin A$.

ПР. У СЕ — підкиданні грального кубика — з $\Omega = \{1; 2; \dots; 6\}$, алгеброю $\mathfrak{N}$ є сукупність усіх підмножин Ω , тобто $\mathfrak{B}(\Omega)$. Подія A «випала парна кількість очок» в цій моделі має вигляд $A = \{2; 4; 6\}$, подія B «кількість очок, що випала, є простим числом» — $B = \{2; 3; 5\}$. Подією, протилежною до B , є $\overline{B} = \{1; 4; 6\}$, тощо.

2.2. Ймовірність

Якщо події мають різні ймовірності, то це має якось проявлятися під час проведення СЕ, і не одного, а декількох: інтуїтивно, чим більше ймовірність події, тим частіше вона відбуватиметься, коли повторювати СЕ багато разів.

Нехай A — подія СЕ. Припустимо, що цей СЕ проводять n разів. Позначимо через $k_n(A)$ кількість тих СЕ з цієї серії, у яких подія A відбулася. Тоді $\nu_n(A) = \frac{k_n(A)}{n}$ — частота події A у послідовності n СЕ. Величина $\nu_n(A)$ має такі властивості:

- 1) $\nu_n(A) \geq 0$ — невід’ємність;
- 2) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \nu_n(A \cup B) = \nu_n(A) + \nu_n(B)$ — аддитивність;
- 3) $\nu_n(U) = 1$ — нормованість.

$\nu_n(\cdot)$ — кількісна міра частоти події у послідовності n СЕ. Але $\nu_n(A)$ є наслідком конкретної серії n СЕ і може змінитися, якщо провести інші n СЕ або змінити n . У МатМод не повинно бути цієї залежності.

$\nu_n(A)$ має відому із досвіду особливість: ця величина коливається біля певного числа, причому із зростанням n коливання зменшуються. Має місце «стабілізація частоти». Природньо припустити, що існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(A) = \nu(A)$, яка має подібні до (1)–(3) властивості. Але зсередини МатМод неможливо довести існування $\nu(A)$, і на практиці ми завжди маємо лише скінченну кількість СЕ, а не всю послідовність.

Зробимо по-іншому: постулюємо — будемо вважати відомим — що для будь-якої події A існує число $P(A)$, яке має наступні властивості:

- 1) $P(A) \geq 0$;
- 2) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
- 3) $P(U) = 1$.

$P(\cdot)$ — ймовірність події.

Так ми означили ймовірність для подій СЕ. Зробимо це для його МатМод.

ОЗН. Клас $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ підмножин множини X називають σ -алгеброю, якщо:

- 1) $\forall A \in \mathfrak{F}: \bar{A} = X \setminus A \in \mathfrak{F}$;
- 2) $\forall \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}, A_i \in \mathfrak{F}: \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$.

ОЗН. Функцію множини $W: \mathfrak{N} \rightarrow [-\infty; +\infty]$ називають *зліченноаддитивною* або σ -аддитивною, якщо

- вона приймає нескінченні значення лише одного знаку;
- для будь-якого зліченного набору попарно неперетинних множин $A_i \in \mathfrak{N}$, $i \in \mathbb{N}$ ($A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$), таких, що $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{N}$:

$$W\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} W(A_i)$$

ОЗН. Нехай Ω — ПЕП, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B}(\Omega)$ — σ -алгебра підмножин Ω . Ймовірністю $P(\cdot)$, заданою на σ -алгебрі $\mathfrak{F}$, називають невід’ємну, зліченноаддитивну, нормовану функцію множини $P : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$:

$$1) \forall A \in \mathfrak{F}: P(A) \geq 0;$$

$$2) \forall \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}, A_i \in \mathfrak{F}, A_i \cap A_j = \emptyset \text{ для } i \neq j:$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i);$$

$$3) P(\Omega) = 1.$$

Ймовірність $P \in \text{МатМод}$ частоти. Кожній події A даного СЕ ставимо у відповідність число $P(A)$, яке вважаємо «справжньою» мірою кількості появи події A у серії СЕ.

ОЗН. Набір $\{\Omega; \mathfrak{F}; P\}$, де $\Omega \neq \emptyset$ — будь-яка множина, $\mathfrak{F}$ — деяка σ -алгебра підмножин Ω , P — ймовірність, задана на $\mathfrak{F}$, називають *ймовірнісним простором* (ЙП). $\{\Omega; \mathfrak{F}; P\}$ — МатМод СЕ.

Разом із цим кожний ЙП $\{\Omega; \mathfrak{F}; P\}$ існує «сам по собі», не потребуючи жодного «реального» СЕ, який він би відображав. ЙП — математичний об’єкт, тому його існування (чи неіснування) має іншу природу. Однак, якщо ми хочемо, щоб ЙП був моделлю конкретного СЕ, то маємо право вимагати від нього характерних властивостей прототипу. Наприклад, для ЙП, що моделює підкидання симетричної монети, множини-події A «видав герб» і B «випала решітка» напевно матимуть однакову ймовірність, $P(A) = P(B) = p$. Чи можна далі стверджувати, що $p = \frac{1}{2}$? Це залежить від СЕ; адже більш точна модель такого СЕ повинна враховувати третю можливість — подію C «монета встала на ребро».

Термінологія теорії ймовірностей	Термінологія теорії множин
Достовірна подія U	Множина Ω
Елементарна подія E	Елемент $\omega \in \Omega$
Неможлива подія V	$\emptyset$
Подія A , подія B	$\Omega \supseteq A \in \mathfrak{F}, \Omega \supseteq B \in \mathfrak{F}$
З події A випливає подія B	$A \subseteq B$
Подія C — сума подій A і B	$C = A \cup B$
Подія C — добуток подій A і B	$C = A \cap B$
Події A і B несумісні	$A \cap B = \emptyset$
Подія C — протилежна події A	$C = \bar{A} = \Omega \setminus A$
Подія C — різниця подій A і B	$C = A \setminus B$
Подія C — симетрична різниця A і B	$C = A \Delta B$

3. Властивості ймовірності

ТВ. 0. ЙП існують.

Таким чином, подальше не є «розмовою ні про що», тобто означення ЙП не містить внутрішнього протиріччя.

ТВ. 1. Ймовірність неможливої події дорівнює 0; $P(\emptyset) = 0$.

Н. 1. σ -аддитивна ймовірність є скінченноаддитивною: $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$.

Н. 2. Обмеженість ймовірності: $0 \leq P(A) \leq 1$.

ТВ. 2. Ймовірність різниці подій: $A \subseteq B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

Н. 1. Ймовірність протилежної події: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Н. 2. Монотонність ймовірності: якщо $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$.

ТЕОР. (Додавання). $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Н. 1. Напівааддитивність ймовірності: $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

Н. 2. Формула включення-виключення:

$$P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{k=1}^n ((-1)^{k-1} \sum_{(i_1; i_2; \dots; i_k): 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}))$$

Зокрема, $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

Чи можна стверджувати: якщо $P(A) = 0$, то $A = \emptyset$? Виявляється — ні: візьмемо $\Omega = \{a; b\}$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}(\Omega) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{a; b\}\}$, і нехай $P: \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$: $P(\emptyset) = P(\{a\}) = 0$, $P(\{b\}) = P(\{a; b\}) = 1$. Набір $\{\Omega; \mathfrak{F}; P\}$ є ЙП, але подія $A = \{a\} \neq \emptyset$, хоча $P(A) = 0$.

ОЗН. Послідовність множин $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ називають *неспадною* (незростаючою), якщо $\forall n \in \mathbb{N}: A_n \subseteq A_{n+1}$ ($A_n \supseteq A_{n+1}$). Позначення: $A_n \nearrow (A_n \searrow)$.

ТЕОР. (Неперервність ймовірності). Нехай $\Omega \neq \emptyset$ — множина, $\mathfrak{F}$ — σ -алгебра підмножин Ω , $P(\cdot)$ — невід'ємна, скінченноаддитивна, нормована ф-ція множини, задана на $\mathfrak{F}$. Тоді наступні 4 твердження є рівносильними:

1) P — зліченноаддитивна;

2) для $\forall \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}, A_n \nearrow, A_n \in \mathfrak{F}: \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$;

3) для $\forall \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}, A_n \searrow, A_n \in \mathfrak{F}: \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$;

4) для $\forall \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}, A_n \searrow, A_n \in \mathfrak{F}, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset: \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$.

4. Дискретний ймовірнісний простір

Складність побудови ЙП $\{\Omega; \mathfrak{F}; P\}$ залежить від складності його компонент. Найпростіше обрати ПЕП Ω — будь-яку непорожню множину. А от $\mathfrak{F}$ повинна бути σ -алгеброю, замкненою відносно операцій доповнення і об'єднання зліченної сукупності елементів. Нарешті, на $\mathfrak{F}$ мусимо так визначити функцію множини $P(\cdot)$, щоб вона задовольняла 3-м аксіомам ймовірності.

Але якщо множина Ω є дискретною, зробити це дещо легше.

ОЗН. Дискретною називають скінченну або зліченну множину X .

ТЕОР. Нехай Ω — дискретна множина, $P: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ — невід'ємна ф-ція точки на Ω , така, що $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$. Тоді ф-ція множини $P: \mathfrak{B}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_+$: $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$ є ймовірністю. Тобто, щоб знайти ймовірність події $A \subseteq \Omega$, складаємо ймовірності $P(\omega)$ всіх ЕП, які входять в A .

Коли ПЕП Ω дискретний, то для означення ймовірності на σ -алгебрі підмножин Ω достатньо задати ймовірності елементарних подій. $P(\{\omega\}) = P(\omega)$.

Так задана ймовірність P означена на будь-якій σ -алгебрі $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B}(\Omega)$, тому що P означена на $\mathfrak{B}(\Omega)$ — найбільшій σ -алгебрі підмножин Ω , яка містить усі інші σ -алгебри. Отже, компонент $\mathfrak{F}$ такого ЙП можна не вказувати, вважаючи завжди $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}(\Omega)$, і позначати такий ЙП — $\{\Omega; P\}$.

ОЗН. Нехай Ω — дискретна, а $P(\cdot)$ побудована так, як у теоремі. Тоді ЙП $\{\Omega; P\}$ називають *дискретним* (ДЙП).

ОЗН. Ймовірність $P(\cdot)$, задану на дискретній множині $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, називають *дискретним ймовірнісним розподілом на $\mathbb{R}^n$* (ДЙР). Невід'ємну функцію точки $P: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$, таку, що $\sum_{x \in \Omega} P(x) = 1$, яка однозначно визначає такий розподіл, називають *дискретним розподілом на $\mathbb{R}^n$* .

ПР. МатМод СЕ — підкидання грального кубика — ДЙП $\{\Omega; P\}$, де $\Omega = \{1; 2; \dots; 6\}$ і $P(k) = \frac{1}{6}$, $k = \overline{1, 6}$. Тоді ймовірність події A «випала парна кількість очок», $A = \{2; 4; 6\}$ — $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) = P(2) + P(4) + P(6) = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

Відмітимо, що такий вибір ймовірностей ЕП не впливає з жодної теореми, його обґрунтовують «природніми» властивостями даного СЕ, зокрема, «симетрією» кубика.

Розглянутий ЙП має важливу особливість — всі ЕП рівноймовірні.

4.1. Класична модель

ОЗН. ДІП $\{\Omega; P\}$, де $P(\omega_i) = P(\omega_j)$ для $\forall i, j$, тобто всі ЕП рівноймовірні, називають *класичною моделлю* (КМ).

ТВ. 1. Якщо $\{\Omega; P\}$ — КМ, то Ω скінченна і $\forall \omega \in \Omega: P(\omega) = \frac{1}{n(\Omega)}$.

ТВ. 2. (Формула класичної ймовірності). Якщо ДІП $\{\Omega; P\}$ — КМ,
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

У КМ ймовірність події $A \subseteq \Omega$ дорівнює відношенню кількості $n(A)$ ЕП, що входять в A , до загальної кількості $n(\Omega)$ ЕП, що входять в Ω .

Таку ймовірність називають *класичною ймовірністю*.

У прикладі з гральним кубиком (див. вище) можна обчислити ймовірність події A за ФКЙ: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Якщо МатМод СЕ — ДІП, але не КМ, то у загальному випадку ФКЙ невірна, і користуватись нею не можна.

5. Умовна ймовірність

Нехай A і B — події СЕ. Розглянемо серію з n реалізацій даного СЕ. Виникає 2 числа: $k_n(B)$ (скільки разів відбулася подія B) та $k_n(A \cap B)$ (скільки разів відбулися разом події A і B). Тоді величина $\nu_n(A/B) = \frac{k_n(A \cap B)}{k_n(B)}$ — частота події A відносно тих СЕ, в яких відбулася і подія B — називається умовною частотою події A відносно події B в серії n СЕ. Якщо зафіксуємо подію B і $k_n(B) > 0$, то функція події $\nu_n(\cdot/B)$ має властивості частоти:

1) $\nu_n(A/B) \geq 0$ — невід'ємність;

2) $A_1 \cap A_2 = V \Rightarrow \nu_n(A_1 \cup A_2/B) = \frac{k_n((A_1 \cup A_2) \cap B)}{k_n(B)} = \frac{k_n((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{k_n(B)} = \frac{k_n(A_1 \cap B) + k_n(A_2 \cap B)}{k_n(B)} = \nu_n(A_1/B) + \nu_n(A_2/B)$ — аддитивність;

3) $\nu_n(U/B) = \frac{k_n(U \cap B)}{k_n(B)} = \frac{k_n(B)}{k_n(B)} = 1$ — нормованість.

Виразимо умовну частоту через безумовну: $\nu_n(A/B) = \frac{k_n(A \cap B)/n}{k_n(B)/n} = \frac{\nu_n(A \cap B)}{\nu_n(B)}$. Природньо вважати, що умовна ймовірність так само пов'язана з безумовною.

ОЗН. Нехай $\{\Omega; \mathfrak{F}; P\}$ — ЙП, $B \in \mathfrak{F}$, $P(B) > 0$. Умовною ймовірністю події $A \in \mathfrak{F}$ відносно події B називають величину $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

$P(A/B)$ — міра прогнозу події A , якщо відомо, що відбулася подія B .

ТЕОР. Нехай $\{\Omega; \mathfrak{F}; P\}$ — ЙП, $B \in \mathfrak{F}$, $P(B) > 0$. Тоді ф-ція множини $P_B: \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$: $P_B(A) := P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ є ймовірністю на $\mathfrak{F}$.

Так що вживання терміну «ймовірність» коректне.

Безумовну ймовірність теж можна розглядати як умовну — відносно «певних умов $\mathfrak{S}$ », які вказані в означенні СЕ. Наприклад, «кубик симетричний» — умова, і подія (B) . Коли вона відбувається, — задаємо ймовірності ЕП, $P(\text{«випала 1»}) = P(\text{«випала 1»}/B) = \frac{1}{6}$.

ТВ. 1. (Формула множення). Нехай $\{\Omega; \mathfrak{F}; P\}$ — ЙП, $A, B \in \mathfrak{F}$, $P(A) > 0$, $P(B) > 0$. Тоді $P(A \cap B) = P(A/B)P(B) = P(B/A)P(A)$ (впливає із означення $P(A/B)$).

ОЗН. Набір $B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{F}$ називають *повною групою подій* (ПГП), якщо

$$\bigcup_{k=1}^n B_k = \Omega \text{ і } B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j \quad (*)$$

(тобто $\{B_k\}_{k=1}^n$ є розбиттям ПЕП Ω). Події, що задовольняють умову $(*)$, називають також *гіпотезами*. ПГП може бути зліченною, $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

ТЕОР. (Формула повної ймовірності). Нехай $B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{F}$ — ПГП, причому $P(B_k) > 0$, $k = \overline{1, n}$. Тоді $\forall A \in \mathfrak{F}$: $P(A) = \sum_{k=1}^n P(A/B_k)P(B_k)$.

◀ $P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (\bigcup_{k=1}^n B_k)) = P(\bigcup_{k=1}^n (A \cap B_k))$. Оскільки $(A \cap B_k) \subseteq B_k$, то $(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = \emptyset$, $i \neq j$, тому за аддитивністю: $P(A) = \sum_{k=1}^n P(A \cap B_k)$. За ф-лою множення $P(A) = \sum_{k=1}^n P(A/B_k)P(B_k)$. ▶

ФПЙ має місце і для зліченної ПГП $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

ТЕОР. (Формули Байєса). Нехай $B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{F}$ — ПГП, $P(B_k) > 0$, $k = \overline{1, n}$. Тоді для $\forall A \in \mathfrak{F}$, $P(A) > 0$: $P(B_k/A) = \frac{P(A/B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^n P(A/B_i)P(B_i)}$.

$$\blacktriangleleft P(B_k/A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} \stackrel{\text{ФМ}}{=} \frac{P(A/B_k)P(B_k)}{P(A)} \stackrel{\text{ФПЙ}}{=} \frac{P(A/B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^n P(A/B_i)P(B_i)} \blacktriangleright$$

Величини $P(B_k)$ і $P(B_k/A)$ називають відповідно *апостеріорними* ймовірностями гіпотез. ФБ мають місце і для зліченної ПГП.

ТЕОР. (Обчислення УЙ в КМ). Якщо ДЙП $\{\Omega; P\}$ — КМ, $B \subseteq \Omega$ і $P(B) > 0$, то ДЙП $\{B; P_B\}$ — також КМ, і $\forall A \subseteq \Omega$ умовна ймовірність $P(A/B)$ в $\{\Omega; P\}$ дорівнює безумовній ймовірності $P_B(A \cap B)$ в $\{B; P_B\}$: $P(A/B) = P_B(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$.

В КМ УЙ $P(A/B)$ події A відносно події B дорівнює відношенню кількості $n(A \cap B)$ ЕП, що входять в $A \cap B$, до кількості $n(B)$ ЕП, що входять в B .

6. Незалежні події

Незалежність (Н/З) — одне з найважливіших понять ТЙ, яке виокремлює її із більш загальних теорії міри, теорії інтегралу Лебега тощо.

Що означає незалежність двох подій, A і B , якогось СЕ?

Подія B не впливає на подію A (і навпаки), на прогноз події A ; точніше — коли відомо, що відбулася подія B , — тобто при виконанні цієї умови, — прогноз події A той самий, якби не мали такої інформації, — тобто без будь-якої умови. На мові МатМод: умовна ймовірність, $P(A/B)$, співпадає з безумовною $P(A)$. Домноживши обидві частини рівності на $P(B)$, отримуємо

ОЗН. Події $A, B \in \mathfrak{F}$ називають *незалежними*, якщо

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Ймовірність добутку незалежних подій дорівнює добутку їх ймовірностей.

Наведемо 2 простих наслідка з означення Н/З подій.

ТВ. 1. Події A і B ($P(B) > 0$) Н/З тоді і тільки тоді, коли $P(A/B) = P(A)$.

ТВ. 2. Якщо події A і B Н/З, то події A і $\bar{B}$ теж Н/З.

Н. Якщо події A і B Н/З, то наступні пари подій теж Н/З: $\bar{A}$ і B , $\bar{A}$ і $\bar{B}$.

ПР. Із колоди, яка містить 52 карти, витягають навмання одну. Подія A — «витягнута карта пікової масті», подія B — «витягнута туза». (1) Чи є події A і B Н/З? (2) Те ж питання, якщо в колоді 53 карти (+1 джокер).

(♣ Club — трефи ♦ Diamond — бубни ♥ Heart — чирви ♠ Spade — піки)

(1) МатМод першого СЕ є КМ $\{\Omega_1; P\}$,

$$\Omega_1 = \{C_2; \dots; C_A; D_1; \dots; D_A; H_1; \dots; H_A; S_1; \dots; S_A\}, n(\Omega_1) = 52$$

$$A = \{S_2; \dots; S_A\}, n(A) = 13, P(A) = \frac{1}{4}; B = \{C_A; D_A; H_A; S_A\}, P(B) = \frac{1}{13}.$$

$$A \cap B = \{S_A\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{52} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{13} = P(A)P(B) \Rightarrow \text{події } A \text{ і } B \text{ Н/З.}$$

(2) МатМод другого СЕ є КМ $\{\Omega_2; P\}$, де $\Omega_2 = \Omega_1 \cup \{J\}$. $n(\Omega_2) = 53$.

$$A, B \text{ і } A \cap B \text{ не змінилися, тому } P(A) = \frac{13}{53}, P(B) = \frac{4}{53} \text{ і } P(A \cap B) = \frac{1}{53}.$$

$$\text{Але } P(A)P(B) = \frac{13 \cdot 4}{53 \cdot 53} = \frac{52}{53 \cdot 53} < \frac{1}{53} = P(A \cap B), \text{ тобто події } A \text{ і } B \text{ не є Н/З.}$$

Поняття Н/З можна узагальнити для більшої, ніж дві, кількості подій:

ОЗН. Нехай $\{\Omega; \mathfrak{F}; P\}$ — ЙП. Події $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{F}$ називають *незалежними в сукупності* (або просто *незалежними*), якщо для довільного набору різних індексів $i_1, i_2, \dots, i_k$, де $2 \leq k \leq n$,

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \times \dots \times P(A_{i_k})$$

ОЗН. Події $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{F}$ називають *попарно незалежними*, якщо для довільної пари різних індексів i, j події A_i та A_j незалежні.

Незалежні в сукупності події є попарно незалежними (наслідок з означення для $k = 2$), але зворотнє твердження у загальному випадку є невірним.

ПР. 1. (Бернштейна, або Про пофарбований тетраедр). Над площиною підкидають правильний тетраедр, в якого 3 грані пофарбовані відповідно у червоний, зелений та синій кольори, а на 4-й грані присутні всі 3 кольори. Для кожної грані ймовірність того, що тетраедр впаде на площину цієї гранню — $\frac{1}{4}$. Події R, G, B — «на грані, якою тетраедр впав на площину, присутній червоний (Red), зелений (Green), синій (Blue) колір».

МатМод даного СЕ є КМ $\{\Omega; P\}$, де $\Omega = \{r; g; b; t\}$. Події $R = \{r; t\}$, $G = \{g; t\}$, $B = \{b; t\}$. $P(R) = P(G) = P(B) = \frac{1}{2}$.

$R \cap G = G \cap B = B \cap R = \{t\} \Rightarrow P(R \cap G) = P(G \cap B) = P(B \cap R) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$,
 $P(R \cap G) = P(R)P(G)$, $P(G \cap B) = P(G)P(B)$, $P(B \cap R) = P(B)P(R)$

Отже, події R, G, B попарно Н/З. Але $R \cap G \cap B = \{t\}$, $P(R \cap G \cap B) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(R)P(G)P(B)$. Значить, події R, G, B не є Н/З в сукупності.

ПР. 2. Підкидають 30-гранний симетричний дайс, грані якого пронумеровані числами від 1 до 30. Події Z (Zwei), D (Drei), F (Fünf) — «число, яке випало на дайсі, ділиться відповідно на 2, 3, 5».

МатМод цього СЕ є КМ $\{\Omega; P\}$, де $\Omega = \{1; 2; \dots; 30\}$. Події $Z = \{2; 4; \dots; 30\}$ ($n(Z) = \frac{30}{2} = 15 \Rightarrow P(Z) = \frac{1}{2}$), $D = \{3; 6; \dots; 30\}$ ($n(D) = 10 \Rightarrow P(D) = \frac{1}{3}$), $F = \{5; 10; \dots; 30\}$ ($P(F) = \frac{1}{5}$).

$Z \cap D = \{6; 12; \dots; 30\}$, $n(Z \cap D) = \frac{30}{2 \cdot 3} = 5 \Rightarrow$
 $P(Z \cap D) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = P(Z)P(D)$

$Z \cap F = \{10; 20; 30\}$, $n(Z \cap F) = \frac{30}{2 \cdot 5} = 3 \Rightarrow$
 $P(Z \cap F) = \frac{3}{30} = \frac{1}{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = P(Z)P(F)$

$D \cap F = \{15; 30\}$, $n(D \cap F) = \frac{30}{3 \cdot 5} = 2 \Rightarrow$
 $P(D \cap F) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = P(D)P(F)$

$Z \cap D \cap F = \{30\}$, $n(Z \cap D \cap F) = \frac{30}{2 \cdot 3 \cdot 5} = 1 \Rightarrow$
 $P(Z \cap D \cap F) = \frac{1}{30} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = P(Z)P(D)P(F)$

Отже, події Z, D, F — Н/З в сукупності. Цей приклад можна узагальнити для n дайсів.

7. Дискретна випадкова величина

Результат багатьох СЕ має «числову» природу — це скаляр або вектор. Підкидаємо 100 монет і записуємо, скільки разів випав герб, кидаємо навмання точку на $[a; b]$... Результатом є «величина, яка залежить від випадку».

Існує декілька підходів до розгляду таких величин.

(1) Випадкова величина як ймовірнісний розподіл на $\mathbb{R}^n$

Розглянемо СЕ, результатом якого є вектор/точка в $\mathbb{R}^n$ (число при $n = 1$). У загальному випадку МатМод такого СЕ є ЙП $\{\Omega; \mathfrak{F}; P\}$ спеціального виду, де $\Omega = \mathbb{R}^n$, а $\mathfrak{F}$ — «стандартна» σ -алгебра підмножин $\mathbb{R}^n$, яку називають « σ -алгеброю борелевих множин на $\mathbb{R}^n$ » і позначають $\mathfrak{B}^n$.

Ймовірність $P(\cdot)$, задану на $\mathfrak{B}^n$, називають *ймовірнісним розподілом* (ЙР) на $\mathbb{R}^n$. Цей розподіл — теж МатМод СЕ з числовим результатом.

У частинному випадку, коли множина X можливих результатів СЕ є дискретною, вказаною моделлю буде ДЙР $Q(\cdot)$ на $\mathbb{R}^n$, який, у свою чергу, однозначно визначає функція точки $Q: X \rightarrow \mathbb{R}_+$, така, що $\sum_{x_i \in X} Q(x_i) = 1$.

ПР. ВВ — кількість очок, що випала на гральному кубуку — ототожнюємо з ДЙР на множині $X = \{1; 2; \dots; 6\} \subset \mathbb{R}^1$. Цей розподіл визначає функція точки $P: X \rightarrow \mathbb{R}_+$; наприклад, для симетричного кубика $P(k) = \frac{1}{6}$, $k = \overline{1, 6}$.

(2) Випадкова величина як функція на ПЕП

Розглянемо величину, яка набуває певного значення внаслідок СЕ. Результатом СЕ у МатМод є ЕП $\omega \in \Omega$. Кожному $\omega \in \Omega$ ставимо у відповідність певну точку $\mathbb{R}^n$, «числової» природи. А відповідність — це функція.

І ВВ — це функція, $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, задана на Ω , зі значеннями в $\mathbb{R}^n$.

ПР. ВВ — кількість підкидань грального кубика до першої появи «6» — ототожнюємо з функцією $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$, заданою на ПЕП Ω ДЙП $\{\Omega; P\}$, де $\Omega = \{(f_1; f_2; \dots; f_m; 6) \mid m \in \mathbb{Z}_+, f_i = \overline{1, 5}, i = \overline{1, m}\}$, наступним чином — для $\omega = (f_1; f_2; \dots; f_m; 6): \xi(\omega) = m$.

ОЗН. Нехай $\{\Omega; P\}$ — ДЙП. Функцію $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ називають *випадковою величиною* (ВВ), (заданою) на ДЙП $\{\Omega; P\}$, зі значеннями в $\mathbb{R}^n$.

Якщо $n = 1$, то ВВ $\xi = \xi(\omega)$ називають *скалярною* (СВВ). Якщо $n > 1$, то ВВ $\xi = \xi(\omega) = (\xi_1(\omega); \dots; \xi_n(\omega))$ називають *n -вимірною векторною* (ВВВ).

Фраза «задано n СВВ» означає також, що задана n -вимірна ВВВ.

Якщо $\xi = (\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n)$ — ВВВ зі значеннями в $\mathbb{R}^n$, то кожна компонента ξ_i , $i = \overline{1, n}$, є СВВ зі значеннями в $\mathbb{R}^1$, і навпаки.

ОЗН. ВВ $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ на ЙП $\{\Omega; \mathfrak{F}; P\}$ називають *дискретною* (ДВВ), якщо вона приймає не більш ніж зліченну кількість значень.

ТВ. ВВ $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ на ДЙП $\{\Omega; P\}$ є дискретною.

7.1. Розподіл дискретної випадкової величини

ОЗН. Нехай $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ — ВВ на ДЙП $\{\Omega; P\}$. $x \in \mathbb{R}^n$ називають *можливим значенням* (МЗ) ВВ ξ , якщо $P\{\xi = x\} = P(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) = x\}) > 0$.

Множину всіх МЗ ВВ ξ позначатимемо X .

ВВ $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ на ДЙП $\{\Omega; P\}$ визначає на множині X своїх МЗ певний ДР, тобто функцію $Q: X \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\sum_{x \in X} Q(x) = 1$.

ОЗН. Нехай $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ — ВВ на ДЙП $\{\Omega; P\}$. *Розподілом* ВВ ξ називають функцію $P_\xi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$: $P_\xi(x) = P\{\xi = x\} = P(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) = x\})$. Позначення: $P_\xi: x \rightarrow P_\xi(x)$. Вона ставить у відповідність кожному МЗ $x \in X$ ймовірність $P_\xi(x) = P\{\xi = x\}$, з якою ξ приймає це значення.

ТВ. Нехай $Q(\cdot)$ — ДЙР на дискретній множині $X \subset \mathbb{R}^n$, який задає ДР $Q: X \rightarrow \mathbb{R}_+$. Тоді $\exists$ ДЙП $\{\Omega; P\}$ і ВВ $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, такі, що розподіл $P_\xi = Q$.

Ці міркування пояснюють фразу «розподіл задає ВВ»; вони зв'язують тлумачення ВВ як ЙР на $\mathbb{R}^n$ і як функції на ЙП зі значеннями в $\mathbb{R}^n$.

Розподіл $\xi = (\xi_1; \dots; \xi_n)$ називають *спільним розподілом* $\xi_1, \dots, \xi_n$.

7.2. Форми запису розподілу випадкової величини

Нехай $\xi = (\xi_1; \dots; \xi_n)$ — ДВВ зі значеннями в $\mathbb{R}^n$.

У *координатній формі* розподіл $P_\xi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ записуємо як $P_\xi: (x_1; \dots; x_n) \rightarrow P_\xi(x_1; \dots; x_n) = P\{\xi = x\}$, де $x = (x_1; \dots; x_n)$ пробігає X — МЗ ВВ ξ , а $P\{\xi = x\}$ — ймовірності, з якими ξ приймає значення x .

Наприклад, для $\xi = (\xi_1; \xi_2)$: $P_\xi(0; 0) = \frac{1}{7}$, $P_\xi(0; 1) = \frac{2}{7}$, $P_\xi(1; 0) = \frac{3}{7}$, ...

У *табличній формі* розподіл ДВВ зі значеннями в $\mathbb{R}^1$ записуємо як

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ P_\xi(x_1) & P_\xi(x_2) & \dots & P_\xi(x_n) & \dots \end{pmatrix}$$

У верхньому рядку — МЗ ВВ ξ , у нижньому — ймовірності, з якими ξ приймає ці значення. Наприклад, $\xi \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$: $P\{\xi = -1\} = \frac{1}{4}$, ...

Розподіл 2-вимірної ДВВ $\zeta = (\xi; \eta)$ записуємо у вигляді *таблиці спільного розподілу* СВВ ξ та η :

η ξ	y_1	y_2	$\dots$	y_m	$\dots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1m}	$\dots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2m}	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$	p_{nm}	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

де $p_{ij} = P_\zeta(x_i; y_j) = P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}$

($\{x_i\}$ — МЗ ВВ ξ , $\{y_j\}$ — МЗ ВВ η).

7.3. Розподіл функції від випадкової величини

Якщо ξ — ВВ зі значеннями в $\mathbb{R}^n$, а $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — деяка функція, то $g(\xi)$ також буде ВВ зі значеннями в $\mathbb{R}^m$, бо вона «залежить від випадку».

ТЕОР. (Про розподіл ф-ції від ВВ). Нехай $\xi = (\xi_1; \dots; \xi_n): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ — ВВ на ДІП $\{\Omega; P\}$ із розподілом $P_\xi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$; функція $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. **Тоді**

$$\forall B \subseteq \mathbb{R}^m: P\{g(\xi) \in B\} = \sum_{x \in X: g(x) \in B} P_\xi(x)$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft P\{g(\xi) \in B\} &= P(\{\omega \in \Omega: g(\xi(\omega)) \in B\}) = \sum_{\omega \in \Omega: g(\xi(\omega)) \in B} P(\omega) = \\ &= \sum_{x \in X: g(x) \in B} \sum_{\omega \in \Omega: \xi(\omega)=x} P(\omega) = \sum_{x \in X: g(x) \in B} P\{\xi = x\} = \sum_{x \in X: g(x) \in B} P_\xi(x) \blacktriangleright \end{aligned}$$

$$\text{Н. 0. } \forall y \in \mathbb{R}^m: P\{g(\xi) = y\} = \sum_{x: g(x)=y} P_\xi(x) \quad (B = \{y\}).$$

$$\text{Н. 1. } \forall B \subseteq \mathbb{R}^n: P\{\xi \in B\} = \sum_{x: x \in B} P_\xi(x) \quad (g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n: g(x) = x).$$

Н. 2. (розподіл компоненти вектора). Нехай $P_\xi(x_1; \dots; x_n)$ — розподіл ВВВ $\xi = (\xi_1; \dots; \xi_n)$, спільний розподіл СВВ $\xi_1, \dots, \xi_n$. **Тоді**

$$P_{\xi_k}(x) = P\{\xi_k = x\} = \sum_{(x_1; \dots; x_n): x_k=x} P_\xi(x_1; \dots; x_n), \quad k = \overline{1, n}$$

Зокрема, для 2-вимірної ВВВ має місце

ТВ. Нехай $P_\zeta(x_i; y_j)$ — розподіл $\zeta = (\xi; \eta)$, спільний розподіл ξ та η . **Тоді**

$$P_\xi(x) = P\{\xi = x\} = \sum_{(x_i; y_j): x_i=x} P_\zeta(x_i; y_j) = \sum_{y_j} P_\zeta(x; y_j)$$

$$P_\eta(y) = P\{\eta = y\} = \sum_{(x_i; y_j): y_j=y} P_\zeta(x_i; y_j) = \sum_{x_i} P_\zeta(x_i; y)$$

де x пробігає МЗ $\{x_i\}$ ВВ ξ , а y пробігає МЗ $\{y_j\}$ ВВ η .

Отже, за спільним розподілом декількох ВВ можна знайти розподіл кожної з них. Зворотнє твердження у загальному випадку невірне.

ПР. 2 симетричні монети підкидають 2 рази. Нехай ξ — число випадань герба при 1-му підкиданні, η — при 2-му. Знайти розподіл ВВ $\mu = \max\{\xi; \eta\}$.

Означимо ВВ ξ та η як функції на ПЕП Ω ДЙП $\{\Omega; P\}$, моделі СЕ.

Нехай $\Omega = \{(t_{11}; t_{12}; t_{21}; t_{22}) \mid t_{ij} = P, \Gamma, i = 1, 2, j = 1, 2\}$, де t_{ij} — результат i -го підкидання j -ї монети. Вважаємо ЕП рівномірними, тобто маємо КМ з $P(\omega) = \frac{1}{n(\Omega)} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$.

$\xi(\omega)$ — кількість «Г» серед t_{11} і t_{12} ; $\eta(\omega)$ — кількість «Г» серед t_{21} і t_{22} .

ВВ μ є ф-цією від ВВ $\zeta = (\xi; \eta)$. Знайдемо розподіл ВВВ ζ , тобто спільний розподіл СВВ ξ та η — $P_\zeta(x_i; y_j)$. Очевидно, що МЗ ВВ ξ та η є 0, 1, 2.

η	0	1	2
ξ			
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$P_\zeta(0; 0) = P_{\xi; \eta}(0; 0) = P(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) = \eta(\omega) = 0\}) = P(\{(PPPP)\}) = \frac{1}{16},$$

$$P_\zeta(0; 1) = P_{\xi; \eta}(0; 1) = P(\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) = 0, \eta(\omega) = 1\}) = P(\{(PPRG); (PRGP)\}) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16},$$

і т.д. ...

Заповнюючи дану таблицю, можна використовувати симетрію відносно головної діагоналі (ГД) — $P_\zeta(i; j) = P_\zeta(j; i)$. В інших задачах такої симетрії може не бути.

ВВ $\mu = \max\{\xi; \eta\}$ також є дискретною, її МЗ — 0, 1, 2. За теоремою про розподіл функції від ВВ, для ВВ $\zeta: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ і $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1: g(x_1; x_2) = \max\{x_1; x_2\}$ отримуємо розподіл P_μ ВВ $\mu = g(\zeta)$:

$$P_\mu(k) = P\{\mu = k\} = P\{\max\{\xi; \eta\} = k\} = \sum_{(i; j): \max\{i; j\} = k} P_\zeta(i; j), \quad k = 0, 1, 2$$

Побудуємо таблицю значень, які приймає ВВ μ :

η	0	1	2
ξ			
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$$P_\mu(0) = P_\zeta(0; 0) = \frac{1}{16},$$

$$P_\mu(1) = P_\zeta(0; 1) + P_\zeta(1; 1) + P_\zeta(1; 0) = \frac{1}{2},$$

$$P_\mu(2) = P_\zeta(0; 2) + \dots + P_\zeta(2; 0) = \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16} = \frac{7}{16}.$$

Можна обчислити $P_\mu(2)$ по-іншому — оскільки P_μ є ДР на $X_\mu = \{0; 1; 2\}$, то $P_\mu(0) + P_\mu(1) + P_\mu(2) = 1$, звідки $P_\mu(2) = 1 - P_\mu(0) - P_\mu(1)$.

Отже, $\mu = \max\{\xi; \eta\} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{2} & \frac{7}{16} \end{pmatrix}$. Якщо обчислюємо $P_\mu(k)$ безпосередньо, то можливий ще 1 етап розв'язку — «контроль»: складаємо усі отримані ймовірності та перевіряємо, щоб їх сума дорівнювала 1.

7.4. Незалежні випадкові величини

ОЗН. СВВ ξ та η називають *незалежними* (Н/З), якщо

$$\forall A, B \subseteq \mathbb{R}^1: P\{\xi \in A, \eta \in B\} = P\{\xi \in A\} \cdot P\{\eta \in B\}$$

Тому, якщо існує хоча б одна пара підмножин A_0 і B_0 простору $\mathbb{R}^1$, для яких ця рівність не виконується, то ВВ ξ та η не будуть Н/З.

Як і для подій, узагальнимо поняття Н/З для більшої кількості ВВ.

ОЗН. СВВ $\xi_1, \dots, \xi_n$ називають *незалежними в сукупності*, якщо $\forall A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}^1: P\{\xi_1 \in A_1, \dots, \xi_n \in A_n\} = P\{\xi_1 \in A_1\} \times \dots \times P\{\xi_n \in A_n\}$

ОЗН. СВВ $\xi_1, \dots, \xi_n$ називають *попарно незалежними*, якщо для $\forall i, j, i \neq j$: ВВ ξ_i та ξ_j є Н/З.

Із Н/З в сукупності випливає попарна Н/З. Зворотнє може бути невірним.

ТВ. Нехай ξ та η — Н/З СВВ; ф-ції $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ та $g: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$. Тоді СВВ $f(\xi)$ та $g(\eta)$ теж Н/З. «Ф-ції від Н/З ВВ є Н/З ВВ».

7.5. Спільний розподіл незалежних випадкових величин

Вище відмічали, що за спільним розподілом декількох СВВ можна визначити розподіл кожної з них, а навпаки — у загальному випадку ні. Проте у частинному випадку, коли вони Н/З, це можливо.

ТЕОР. Нехай $\xi_1, \dots, \xi_n$ — СВВ з розподілами $P_{\xi_1}(x_1), \dots, P_{\xi_n}(x_n)$ і спільним розподілом $P_{\xi}(x_1; \dots; x_n)$ (тобто P_{ξ} — розподіл ВВ $\xi = (\xi_1; \dots; \xi_n)$).

ВВ $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ Н/З **тоді** $P_{\xi}(x_1; \dots; x_n) = \prod_{i=1}^n P_{\xi_i}(x_i)$ для всіх МЗ $x_1, \dots, x_n$ ВВ $\xi_1, \dots, \xi_n$ відповідно, тобто спільний розподіл ВВ $\xi_1, \dots, \xi_n$ дорівнює добутку їх розподілів,

$$P_{\xi} = P_{\xi_1} \times P_{\xi_2} \times \dots \times P_{\xi_n}$$

Зокрема, при $n = 2$ має місце

ТВ. Нехай ξ та η — СВВ з розподілами $P_{\xi}(x_i)$ та $P_{\eta}(y_j)$ і спільним розподілом $P_{\xi;\eta}(x_i; y_j)$. ВВ ξ та η Н/З **тоді** $P_{\xi;\eta}(x_i; y_j) = P_{\xi}(x_i) \cdot P_{\eta}(y_j)$ для всіх МЗ x_i та y_j ВВ ξ та η .

8. Математичне сподівання (дискретний випадок)

Коли у нас є декілька реалізацій даної ВВ, послідовність її значень, отриманих внаслідок проведення СЕ (наприклад, координати точки, навімання кинутої на відрізок), ми часто замінюємо їх одним значенням і вважаємо, що воно більш «очищене від випадковості», говорить нам щось важливе про цю величину. Ми знаходимо їх середнє арифметичне.

Хотілося б мати аналог цієї характеристики, який би не залежав від конкретних — непередбачуваних — реалізацій випадкової величини.

ОЗН. Нехай $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ — ВВ на ДЙП $\{\Omega; P\}$. *Математичним сподіванням* (МС) (середнім) ВВ ξ — $M\xi$ (або $E\xi$) — називають суму ряду $\sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)P(\omega)$, якщо цей ряд збігається **абсолютно**, тобто збіжним є ряд $\sum_{\omega \in \Omega} |\xi(\omega)|P(\omega)$. M — «**М**атематичне», E — «**E**xpectation».

МС ВВВ $\xi = (\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ на ДЙП $\{\Omega; P\}$ називають вектор $M\xi = (M\xi_1; M\xi_2; \dots; M\xi_n)$, якщо всі $M\xi_i$ існують, $i = 1, n$.

• Вживаючи фрази « $M\xi$ це значення, яке ξ приймає в середньому», слід пам'ятати: такий вислів лише говорить, що $M\xi$ дорівнює такому-то числу. Серед МЗ ξ його може і не бути; нехай, наприклад, $\xi \sim \begin{pmatrix} -1000000 & 1000000 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. За означенням, $M\xi = -10^6 \cdot \frac{1}{2} + 10^6 \cdot \frac{1}{2} = 0$, але будь-яка реалізація ξ є або -10^6 , або $+10^6$; ξ ніколи не приймає своє середнє значення.

• Вимагаємо саме абсолютної збіжності ряду $\sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)P(\omega)$, бо інакше його сума залежатиме від порядку, в якому нумеруємо $\omega \in \Omega$, а ніякого «єдиного», «природнього» порядку немає (навіть якщо $\Omega = \mathbb{N}$).

8.1. Властивості математичного сподівання

В. 1. Якщо $\xi = \xi(\omega) \equiv c$ (де $c = const$), то $M\xi = Mc = c$.

МС константи дорівнює цій константі.

В. 2. (**лінійність МС**). Нехай $\{a_i\}_{i=1}^n$ — деякі константи.

$M(\sum_{i=1}^n a_i \xi_i) = \sum_{i=1}^n a_i M\xi_i$, якщо всі $M\xi_i$ існують.

Н. 1. $M(c\xi) = cM\xi$.

Н. 2. $M(\xi \pm \eta) = M\xi \pm M\eta$.

В. 3. Якщо $\exists M\xi$, то $|M\xi| \leq M|\xi|$.

В. 4. Якщо $\xi \geq 0$ (тобто $\forall \omega \in \Omega: \xi(\omega) \geq 0$), то $M\xi \geq 0$.

ТЕОР. 1. (Обчислення $Mg(\xi)$ за розподілом ξ). Нехай $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ — ВВ на ДЙП $\{\Omega; P\}$ з розподілом $P_\xi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$; функція $g: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$. Тоді $\exists Mg(\xi) \Leftrightarrow$ ряд $\sum_{x_i \in X} g(x_i)P_\xi(x_i)$ є абс. зб., при цьому $Mg(\xi) = \sum_{x_i \in X} g(x_i)P_\xi(x_i)$

Зокрема, якщо ряд $\sum_{x_i \in X} x_i P_\xi(x_i)$ є абс. зб., то $M\xi = \sum_{x_i \in X} x_i P_\xi(x_i)$.

◀ Розіб'ємо Ω на прообрази відносно функції $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ точок $x_i \in X \subset \mathbb{R}^1 - \Omega = \bigcup_{x_i \in X} \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) = x_i\}$. Використаємо переставну властивість абс. зб. рядів: $Mg(\xi) = \sum_{\omega \in \Omega} g(\xi(\omega))P(\omega) =$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\omega \in \bigcup_{x_i \in X} \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) = x_i\}} g(\xi(\omega))P(\omega) = \sum_{x_i \in X} \left(\sum_{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = x_i} g(\xi(\omega))P(\omega) \right) = \\ &= \sum_{x_i \in X} \left(\sum_{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = x_i} g(x_i)P(\omega) \right) = \sum_{x_i \in X} \left(g(x_i) \sum_{\omega \in \Omega: \xi(\omega) = x_i} P(\omega) \right) = \\ &= \sum_{x_i \in X} g(x_i)P\{\xi = x_i\} = \sum_{x_i \in X} g(x_i)P_\xi(x_i) \blacktriangleright \end{aligned}$$

Отже, розподіл ВВ визначає її МС. Аналогічно для векторної ВВ:

ТЕОР. 2. Нехай $\xi = (\xi_1; \dots; \xi_n): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ — ВВ на ДЙП $\{\Omega; P\}$ з розподілом $P_\xi: (x_1; \dots; x_n) \rightarrow P_\xi(x_1; \dots; x_n)$, $(x_1; \dots; x_n) \in X$; функція $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$.

$\exists Mg(\xi)$ тоді дот ряд $\sum_{(x_1; \dots; x_n) \in X} g(x_1; \dots; x_n)P_\xi(x_1; \dots; x_n)$ є абс. зб, при цьому

$$Mg(\xi) = \sum_{(x_1; \dots; x_n) \in X} g(x_1; \dots; x_n)P_\xi(x_1; \dots; x_n)$$

Отже, розподіл ВВ, заданої на ДЙП зі значеннями в $\mathbb{R}^n$, дозволяє обчислити МС будь-якої скалярної функції від неї, якщо воно існує.

ПР. 1. Підкидають 2 симетричні гральні кубики. Нехай ξ — кількість очок, що випала на 1-му кубіку, η — на 2-му. Обчислити $M(\xi + \eta)$.

Оскільки за умовою кубики симетричні, то $\xi, \eta \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

За теоремою 1: $M\xi = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1+2+\dots+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3.5$, аналогічно $M\eta = \frac{7}{2}$. За лінійністю МС, $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7$.

ПР. 2. ВВ ξ має розподіл Пуассона з параметром λ . Знайти $M\frac{1}{\xi+1}$.

За умовою, $P_\xi(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. За теоремою 1: $M\frac{1}{\xi+1} = Mg(\xi)$, де $g(x) = \frac{1}{x+1}$, отже, $Mg(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} P_\xi(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} =$
 $\frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} (e^\lambda - 1) = \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda})$.

Маємо властивість лінійності, завдяки їй МС лінійної комбінації ВВ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ — наприклад, $M(\xi_1 - \xi_2)$ — знаходимо не «з нуля», а з використанням вже відомих $M\xi_1, M\xi_2, \dots, M\xi_k$. Однак ВВ не тільки складаються. Зокрема, їх можна перемножувати. І з'являється аналогічне питання: якщо нам відомі $M\xi$ та $M\eta$, то як обчислити $M(\xi\eta)$? У загальному випадку, маючи спільний розподіл ξ та η , можна (принаймні, теоретично) знайти розподіл ВВ $\mu = \xi\eta$ як функції від ВВ $\zeta = (\xi; \eta)$ і обчислювати $M\mu = \sum_{z_i} z_i P_\zeta(z_i)$.

Але якщо ξ та η Н/З, наступна властивість спрощує задачу:

ТЕОР. (Мультиплікативна властивість МС). Нехай $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ та $\eta: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ — Н/З ВВ, такі, що $\exists M\xi$ та $\exists M\eta$. Тоді $\exists M(\xi\eta) = M\xi \cdot M\eta$.

◀ Нехай $P_\xi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ та $P_\eta: Y \rightarrow \mathbb{R}_+$ — розподіли ВВ ξ та η відповідно, а $P_\zeta: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$ — їх спільний розподіл; $P_\zeta = P_\xi \times P_\eta$.

$$\begin{aligned} M\xi\eta &= \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)\eta(\omega)P(\omega) = \sum_{(x_i; y_j) \in X \times Y} x_i \cdot y_j \cdot P_\zeta(x_i; y_j) = \\ &= \sum_{(x_i; y_j) \in X \times Y} x_i \cdot y_j \cdot P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} \stackrel{\xi, \eta = \text{Н/З}}{=} \\ &= \sum_{(x_i; y_j) \in X \times Y} x_i \cdot y_j \cdot P\{\xi = x_i\} \cdot P\{\eta = y_j\} = \\ &= \sum_{x_i \in X} \left(x_i \cdot P_\xi(x_i) \sum_{y_j \in Y} y_j \cdot P_\eta(y_j) \right) = \left(\sum_{x_i \in X} x_i \cdot P_\xi(x_i) \right) \cdot \left(\sum_{y_j \in Y} y_j \cdot P_\eta(y_j) \right) = \\ &= \left(\sum_{\omega \in \Omega} |\xi(\omega)| P(\omega) \right) \cdot \left(\sum_{\omega \in \Omega} |\eta(\omega)| P(\omega) \right) = M\xi \cdot M\eta \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Поеднаємо цей результат із теоремою про Н/З функцій від Н/З ВВ:

ТВ. Нехай $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ та $\eta: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ — Н/З ВВ на ДЙП $\{\Omega; P\}$, а функції $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ та $g: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ такі, що $\exists Mf(\xi)$ та $\exists Mg(\eta)$.

Тоді $\exists M(f(\xi) \cdot g(\eta)) = Mf(\xi) \cdot Mg(\eta)$.

ПР. 3. Підкидають 2 гральні кубики: 1-ий симетричний, а 2-ий виготовлено так, що ймовірність випадання грані пропорційна числу очок на ній. ξ — кількість очок, що випала на 1-му кубіку, η — на 2-му. Обчислити $M(\xi\eta)$.

За умовою $\xi \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, а $\eta \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{21} & \frac{2}{21} & \frac{3}{21} & \frac{4}{21} & \frac{5}{21} & \frac{6}{21} \end{pmatrix}$.
 $M\xi = \frac{1+2+\dots+6}{6} = \frac{7}{2}$, $M\eta = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + 6 \cdot 6}{21} = \frac{91}{21} = \frac{13}{3}$. За мультиплікативною властивістю МС $M(\xi \cdot \eta) = M\xi \cdot M\eta = \frac{7}{2} \cdot \frac{13}{3} = \frac{91}{6} = 15\frac{1}{6}$.

• У загальному випадку (якщо ξ та η не є незалежними) МультВласт місця не має. Може бути так, що $M\xi$ та $M\eta$ існують, а $M(\xi\eta)$ — ні.

• Рівність $M\xi_\eta = \frac{M\xi}{M\eta}$ невірна у загальному випадку, навіть якщо $M\eta \neq 0$. Користуватись такою рівністю не можна.

8.2. Дисперсія випадкової величини

Ввели поняття МС — «середнього» ВВ. Однак у загальному випадку ця ВВ приймає й інші значення, що можуть сильно відрізнятись — ухилятись — від середнього. Наскільки сильно? Або, точніше, які прогнози щодо великих ухилень, з якою ймовірністю вони трапляються? Отже, цікавимося, «наскільки добре» — в тому чи іншому сенсі — МС ВВ наближає її. Природньо вважати, що «добре», коли великі ухилення трапляються рідко, і «погано», коли вони відбуваються часто. Як можна визначити кількісну міру зв'язку між величиною ухилення та його ймовірністю?

ТЕОР. (Нерівність Чебишова). $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ — ВВ на ДЙП $\{\Omega; P\}$, $M\xi \neq \infty$. Тоді $\forall \varepsilon > 0: P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} M(\xi - M\xi)^2$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft M(\xi - M\xi)^2 &= \sum_{\omega \in \Omega} (\xi(\omega) - M\xi)^2 P(\omega) = \\ &= \sum_{\omega \in \Omega: |\xi(\omega) - M\xi| \geq \varepsilon} (\xi(\omega) - M\xi)^2 P(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega: |\xi(\omega) - M\xi| < \varepsilon} (\xi(\omega) - M\xi)^2 P(\omega) \geq \\ &\geq \sum_{\omega \in \Omega: |\xi(\omega) - M\xi| \geq \varepsilon} (\xi(\omega) - M\xi)^2 P(\omega) \geq \varepsilon^2 P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \end{aligned}$$

поділимо обидві частини нерівності на ε^2 і отримаємо твердження. $\blacktriangleright$

Якщо вважати певне число ε «порогом», який відділяє «малі» ухилення ξ від $M\xi$ та «великі», то із нерівності Чебишова випливає, що ймовірність великих ухилень, тобто $P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\}$, тим менше, чим менше величина $M(\xi - M\xi)^2$. Тому цю величину можна розглядати як кількісну міру ухилення (розкиду) ВВ ξ від $M\xi$.

ОЗН. Дисперсією СВВ ξ називають $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$ — середнє квадрату ухилення ВВ від її середнього.

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2 - 2\xi \cdot M\xi + (M\xi)^2) = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

В. 0. Для будь-якої СВВ ξ : $D\xi \geq 0$.

В. 1. Нехай ξ — СВВ, $a \in \mathbb{R}^1$ і $b \in \mathbb{R}^1$. Тоді $D(a\xi + b) = a^2 D\xi$.

$$\blacktriangleleft D(a\xi + b) = M(a\xi + b - aM\xi - b)^2 = a^2 M(\xi - M\xi)^2 = a^2 D\xi \blacktriangleright$$

Н. 1. Якщо $c = \text{const}$, то $Dc = 0$; $D \text{ const}$ дорівнює 0.

Н. 2. Якщо ξ — СВВ і $c = \text{const}$, то $D(c\xi) = c^2 D\xi$.

В. 2. (Аддитивність дисперсії). Якщо ξ та η — Н/З СВВ, то $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$; D суми Н/З ВВ дорівнює сумі їх D .

$$\begin{aligned}
\blacktriangleleft D(\xi + \eta) &= M(\xi + \eta - M(\xi + \eta))^2 = M((\xi - M\xi) + (\eta - M\eta))^2 = \\
&= M(\xi - M\xi)^2 + M(\eta - M\eta)^2 + 2M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = \\
&= D\xi + D\eta + 2M(\xi \cdot \eta - \xi \cdot M\eta - \eta \cdot M\xi + M\xi \cdot M\eta) \stackrel{\text{МультиВласт для Н/З } \xi, \eta}{=} \\
&= D\xi + D\eta + 2(\underbrace{M\xi \cdot M\eta - M\xi \cdot M\eta}_{0} - \underbrace{M\eta \cdot M\xi + M\xi M\eta}_{0}) = D\xi + D\eta \blacktriangleright
\end{aligned}$$

Н. Якщо ξ та η — Н/З СВВ, то $D(\xi - \eta) = D\xi + D\eta$.

В. 3. Якщо $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — попарно Н/З СВВ, то $D(\sum_{i=1}^n \xi_i) = \sum_{i=1}^n D\xi_i$.

В означенні дисперсії і у наведених властивостях ми не акцентували увагу на тому, щоб розглядувані ВВ були дискретними. Ці властивості матимуть місце і для більш загального випадку, схема їх доведення не змінюється. Але в дискретному випадку маємо формули для обчислення МС, а значить — і формули для обчислення дисперсії.

Якщо ξ — дискретна ВВ з розподілом P_ξ на дискретній множині $X = \{x_i\} \subset \mathbb{R}^1$, то за теоремою 1 маємо наступні формули для обчислення $D\xi$:

$$\begin{aligned}
D\xi &= M(\xi - M\xi)^2 = \sum_{x_i \in X} (x_i - M\xi)^2 P_\xi(x_i) = \\
&= \sum_{x_i \in X} \left(x_i - \sum_{x_i \in X} x_i P_\xi(x_i) \right)^2 P_\xi(x_i), \\
D\xi &= M\xi^2 - (M\xi)^2 = \sum_{x_i \in X} x_i^2 P_\xi(x_i) - \left(\sum_{x_i \in X} x_i P_\xi(x_i) \right)^2.
\end{aligned}$$

ПР. 4. Підкидають 2 симетричні гральні кубики. Нехай ξ — кількість очок, що випала на 1-му кубіку, η — на 2-му. Обчислити $D(\xi + \eta)$.

$\xi, \eta \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, і $M\xi = M\eta = \frac{7}{2}$. Так як ВВ ξ та $\eta \in \text{Н/З}$, то $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$. Обчислимо $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$. $M\xi^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}$, звідки $D\xi = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182-147}{12} = \frac{35}{12}$. Аналогічно $D\eta = \frac{35}{12}$, тому $D(\xi + \eta) = \frac{35}{6} = 5\frac{5}{6}$.

9. Схема незалежних випробувань

9.1. Випробування Бернуллі

Цей термін означає послідовність незалежних СЕ (випробувань), кожен з яких має 2 можливих результати, що називають «успіхом» і «невдачею», причому ймовірність «успіху» однакова у всіх СЕ. Прикладами ВБ є:

- 100 підкидань монети; «успіх» — випадання герба, «невдача» — решітки;
- 100 підкидань кубика; «успіх» — випадання «1», «невдача» — не «1»;

Приклади не ВБ:

- 100 послідовних підкидань пластилінового грального кубика (кубик змінює форму, випробування не є незалежними);

- Підкидання скляної монети (третя можливість — монета розбивається).

Далі розглядатимемо не конкретні приклади ВБ, а їх загальну МатМод.

З формальної точки зору, ВБ можна розрізнити за двома параметрами — кількістю випробувань у послідовності ($n \in \mathbb{N}$) та ймовірністю «успіху» в кожному випробуванні ($p \in (0; 1)$). Будемо писати $ВБ(n; p)$ — «послідовність n ВБ з ймовірністю успіху p в кожному випробуванні».

Як ПЕП Ω такого СЕ, візьмемо множину бінарних кодів довжини n . $\omega = (0; 1; 1; \dots; 0)$ (або просто $\omega = 011\dots 0$) означає, що 1-е випробування закінчилось невдачею, у 2-му випробуванні — успіх, ..., в n -му невдача.

Лишилося задати ймовірність P кожної ЕП, щоб завершити побудову ЙП.

ОЗН. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0; 1)$. ЙП $ВБ(n; p)$ називають ДЙП $\{\Omega; P\}$, де $\Omega = \{0; 1\}^n$, а $P(\cdot)$ породжує ф-цією точки $P: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$: $P(\omega) = p^{\mu(\omega)} q^{n-\mu(\omega)}$, де $q = 1 - p$, $\mu(\omega)$ — кількість «1» в ω .

Можна перевірити коректність цього означення: так задана функція точки P дійсно визначає ймовірність.

Також можна переконатись, що цей ЙП має властивості, відповідні Н/З випробувань і однаковості ймовірності успіху в кожному випробуванні. Введемо ВБ $\mu_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ на ДЙП $\{\Omega; P\}$: $\mu_k(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{в } \omega \text{ на } k\text{-му місці «1»,} \\ 0, & \text{в } \omega \text{ на } k\text{-му місці «0»,} \end{cases}$

$k = \overline{1, n}$; $\mu_k((r_1; r_2; \dots; r_n)) = r_k$.

ВБ μ_k — кількість успіхів в k -му випробуванні: або 1 успіх, або 0.

ТЕОР. ВБ $\{\mu_k\}_{k=1}^n \in \text{Н/З}$ в сукупності і мають однаковий розподіл: $\mu_k \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$, тобто $P_{\mu_k}(r) = P\{\mu_k = r\} = p^r q^{1-r}$, $r = 0, 1$.

9.2. Біномний розподіл

Розглянемо ВБ($n; p$). Природньо виникає питання про ймовірність того, що в цій послідовності буде рівно m «успіхів», $m = \overline{0, n}$.

Нехай μ — кількість «успіхів» у ВБ($n; p$). μ — ВВ, функція на ДЙП $\{\Omega; P\}$ ВБ($n; p$): правило, яке визначає $\mu(\omega)$ — кількість «1» в ω . Поставлене питання — про розподіл μ . Значення його, $P_\mu(m)$, в точці m позначають $P_n(m)$.

ТВ. (Формула Бернуллі). $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, $m = \overline{0, n}$.

$$\blacktriangleleft P_n(m) = \sum_{\omega \in \Omega: \mu(\omega)=m} P(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega: \mu(\omega)=m} p^m q^{n-m} = \\ = p^m q^{n-m} \sum_{\omega \in \Omega: \mu(\omega)=m} 1 = C_n^m p^m q^{n-m} \blacktriangleright$$

ОЗН. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0; 1)$. Розподіл $B_{n;p}(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, $m = \overline{0, n}$, називають *біномним розподілом з параметрами* ($n; p$).

Отже, кількість μ «успіхів» у ВБ($n; p$) має розподіл $B_{n;p}$.

ТЕОР. Нехай μ — кількість «успіхів» у ВБ($n; p$). $M\mu = np$, $D\mu = npq$.

$\blacktriangleleft \mu = \sum_{k=1}^n \mu_k$, де ВВ μ_k введені вище — це кількість «успіхів» в k -му випробуванні. $\mu_k \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$, тому $M\mu_k = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$, а $D\mu_k = M\mu_k^2 - (M\mu_k)^2 = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p - p^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$. Отже, $M\mu = \sum_{k=1}^n M\mu_k = np$, а оскільки ВВ μ_k Н/З, то $D\mu = \sum_{k=1}^n D\mu_k = npq$ $\blacktriangleright$

ТЕОР. (Про $\max B_{n;p}(m)$). Нехай $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0; 1)$, $\tilde{m} = (n+1)p$. Тоді (а) Якщо $\tilde{m} \notin \mathbb{Z}$, то $B_{n;p}(m)$ досягає $\max$ в т. $m = [\tilde{m}]$, зростає при $m < [\tilde{m}]$ та спадає при $m > [\tilde{m}]$; (б) Якщо $\tilde{m} \in \mathbb{Z}$, то $B_{n;p}(m)$ досягає $\max$ в т. $m = [\tilde{m}] - 1$ та $m = [\tilde{m}]$, зростає при $m < [\tilde{m}] - 1$ та спадає при $m > [\tilde{m}]$.

9.3. Граничні теореми для біномного розподілу

Задача про телефонні лінії (ЗПТЛ). Телефонна станція A має 500 абонентів. Необхідно зв'язати їх зі станцією B . Для цього прокладають деяку кількість окремих ліній зв'язку від A до B . Коли абонент хоче зв'язатися зі станцією B , йому виділяється вільна в цей момент лінія, що стає зайнятою до кінця розмови; якщо вільних ліній немає, він отримує відмову. Можна прокласти 500 ліній, — тоді відмов не буде, але це надто дорого, причому, напевне, майже весь час велика кількість ліній залишатиметься непотрібною, хоча їх обслуговування (огляд, ремонт) вимагає коштів.

Тому кількість ліній обирають з інших міркувань, — вона має бути такою, щоб ймовірність відмови не перевищувала певної «достатньо малої» величини (точне значення такої порогової ймовірності — інше питання) — наприклад, 0.01. Розглядають найбільш напружену годину доби — протягом якої ймовірність виклику від кожного абонента максимальна. Вважаємо цю ймовірність однаковою — наприклад, $\frac{1}{60}$, тобто в середньому абонент потребує 1 хв. розмови в годину, — а виклики незалежними. Тоді для будь-якого моменту цієї години загальна кількість μ викликів, а отже, і ліній, потрібних абонентам, які зробили ці виклики — ВВ, кількість «успіхів» у $n = 500$ Н/З випробуваннях з ймовірністю «успіху» $p = \frac{1}{60}$ в кожному випробуванні.

Значить, ВВ μ має біномний розподіл з параметрами $n = 500$, $p = \frac{1}{60}$:

$$P\{\mu = m\} = B_{500; \frac{1}{60}}(m) = C_{500}^m \left(\frac{1}{60}\right)^m \left(\frac{59}{60}\right)^{500-m}, \quad m = \overline{0, 500}$$

Якщо k — кількість ліній, то подія «у зв'язку відмовлено» — $\mu > k$.

$$\text{Ймовірність її, } P\{\mu > k\} = \sum_{m=k+1}^{500} P\{\mu = m\} = \sum_{m=k+1}^{500} C_{500}^m \left(\frac{1}{60}\right)^m \left(\frac{59}{60}\right)^{500-m}.$$

Шукаємо найменше k таке, щоб ця сума не перевищувала 0.01. Для обчислень знаходять $B_{n;p}(m)$ при «великих» n і m , але безпосередньо це робити складно. Тому використовують наближення $B_{n;p}(m)$.

Розглянемо 2 наближення такого типу. Щоб описати їх, розширимо поняття ВВ — із фіксованими кількістю випробувань та ймовірністю «успіху» — до серії ВВ (СВВ): послідовності СЕ (1-й, 2-й, ..., n -й, ...), що мають наступний вигляд: • 1-й: ВВ(1; p_1) • 2-й: ВВ(2; p_2) • ... • n -й: ВВ(n ; p_n) • ...

Для скорочення замість p_n пишуть просто p .

Поняття СВВ надає зміст твердженням «велика кількість випробувань» і «мала ймовірність успіху» — $n \rightarrow \infty$ і $p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ відповідно.

ТЕОР. (Пуассона). Нехай $np \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda > 0$. Тоді для кожного $m \in \mathbb{Z}_+$:

$$B_{n;p}(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

ЗАУВ. На практиці т. Пуассона використовують (тобто замість $B_{n;p}(m)$ беруть $\frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$), коли n не менше кількох сотень (в гіршому випадку — кількох десятків), а $\lambda = np \leq 10$; тоді похибка $|B_{n;p}(m) - \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}|$ вважається незначною. Якщо $np > 10$, краще застосувати локальну граничну теорему.

Використаємо т. Пуассона в ЗПТЛ. $n = 500$ — «велике», $p = \frac{1}{60}$ «мале», а $\lambda = np = \frac{500}{60} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3} < 10$. Замінімо розподіл $B_{n;p}$ ВВ μ — кількості викликів — на розподіл Пуассона з параметром λ . Тоді ймовірність відмови,

$$P\{\mu > k\} = \sum_{m=k+1}^{500} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} < \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = 1 - \sum_{m=0}^k \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = f(k)$$

найменше k , для якого $f(k) \leq 0.01$, дорівнює 16.

Це можна отримати, віднімаючи від одиниці $\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}$, $\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}$, ..., поки не залишиться число, ≤ 0.01 . Значення $\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$ обчислюють чи беруть з таблиці.

Таким чином, для того, щоб ймовірність відмови не перевищувала 1%, достатньо прокласти 16 ліній зв'язку.

ТЕОР. (Локальна гранична теорема). Нехай $npq \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, де $q = 1 - p$, а $C > 0$ — константа. Тоді для $m \in \mathbb{Z}_+$ таких, що $|\frac{m-np}{\sqrt{npq}}| \leq C$:

$$B_{n;p}(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(m-np)^2}{npq}} \text{ при } n \rightarrow \infty$$

(тобто відношення цих величин прямує до 1, коли $n \rightarrow \infty$).

ТЕОР. (Інтегральна теорема Муавра-Лапласа (1812) — варіант центральної граничної теореми). Нехай $\mu = \sum_{k=1}^n \mu_k$ — кількість «успіхів» у ВБ($n; p$), $p \in (0; 1)$. Тоді

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^1 \ (x_1 < x_2): P\{x_1 < \frac{\mu-np}{\sqrt{npq}} < x_2\} &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \\ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = P\{x_1 < \eta < x_2\}, &\text{ де } \eta \sim N_{0;1} \end{aligned}$$

10. Дискретні розподіли на $\mathbb{R}^1$

РЕС. Дискретним розподілом (ДР) на $\mathbb{R}^n$ називають невід'ємну функцію $P: X \rightarrow \mathbb{R}_+$, задану на дискретній $X \subset \mathbb{R}^n$, таку, що $\sum_{x \in X} P(x) = 1$. Вона породжує дискретний ймовірнісний розподіл (ДЙР) $P(\cdot)$ — функцію множини, що є ймовірністю ДЙП $\{X; P\}$, де $\forall A \subseteq X: P(A) = \sum_{x \in A} P(x)$.

1. Біномний розподіл (з параметрами $(n; p)$) — $B_{n;p}(\cdot)$

Має 2 параметри — $n \in \mathbb{N}$ та $p \in (0; 1)$. Заданий на $X = \{0; 1; \dots; n\}$.

$\forall k \in X: B_{n;p}(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. За формулою бінома Ньютона $\sum_{k=0}^n B_{n;p}(k) = (p + (1-p))^n = 1$. Цей розподіл виникає у зв'язку з ВБ.

2. Розподіл Пуассона (з параметром λ) — $P_\lambda(\cdot)$

Має 1 параметр — $\lambda > 0$. Заданий на $X = \mathbb{Z}_+$. $\forall k \in X: P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

Це також розподіл, адже $\sum_{k=0}^{\infty} P(k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^\lambda = 1$. Вважають, що кількість подій у певних експериментах — невід'ємна ціла ВБ — має такий розподіл; наприклад, кількість спрацювань лічильника Гейгера, викликів абонентів, аварій на даному промисловому об'єкті тощо.

3. Геометричний розподіл (з параметром p) — $P_p(\cdot)$

Має 1 параметр — $p \in (0; 1)$. Заданий на $X = \mathbb{Z}_+$.

$\forall k \in X: P_p(k) = p(1-p)^k$. $\sum_{k=0}^{\infty} P(k) = p \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k$ — сума нескінченної

геометричної прогресії із знаменником $(1-p)$, дорівнює $p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1$.

Цей розподіл описує важливий тип СЕ, пов'язаного із ВБ. Такий СЕ полягає у послідовному проведенні до першого успіху Н/З випробувань з двома результатами (успіх та невдача) і незмінною ймовірністю успіху — p .

Аби встановити зв'язок такого СЕ з геометричним розподілом, побудуємо його МатМод. Це буде ДЙП $\{\Omega; P\}$, де $\Omega = \{1; 01; 001; \dots; \underbrace{00\dots 0}_m 1; \dots\}$ (ЕП $\omega = \underbrace{00\dots 0}_m 1$ означає, що перед першим успіхом було рівно m невдач). Оскільки m нулів

випробування Н/З, тобто ВБ $\{\mu_i\}$ — результат i -го випробування — Н/З (в сукупності), і $\mu_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$, то природньо вважати $P(\omega) = P(\underbrace{00\dots 0}_m 1) =$

$$P\{\mu_1 = 0, \dots, \mu_m = 0, \mu_{m+1} = 1\} = \\ = P\{\mu_1 = 0\} \times \dots \times P\{\mu_m = 0\} \cdot P\{\mu_{m+1} = 1\} = (1-p)^m p$$

Отже, ДЙП $\{\Omega; P\}$ моделює даний СЕ, і геометричний розподіл — це розподіл ВБ ξ , заданої на цьому ДЙП так: $\xi(\omega) = \xi(\underbrace{00\dots 0}_m 1) = m$. m нулів

ВБ ξ називають *часом очікування першого «успіху»*.

Відмітимо властивість цього СЕ, т.з. «відсутність пам'яті (або післядії)». Як побачимо далі, ця властивість є характеристичною для геометричного розподілу: коли деякий розподіл має таку властивість, він є геометричним.

ОЗН. Говорять, що ВБ $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+$ має властивість *відсутності післядії* (ВВП), якщо $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z}_+: P\{\xi = n + m / \xi \geq n\} = P\{\xi = m\}$.

(інформація про те, що перші n випробувань закінчились «невдачею», не змінює прогнозу щодо кількості випробувань до першого «успіху»).

ТЕОР. (Про відсутність післядії геометричного розподілу). ВБ $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+$ має ВВП **тоді** і **тільки** коли вона має геометричний розподіл.

◀ • Нехай ВБ ξ має геометричний розподіл з параметром $p \in (0; 1)$:

$$P_\xi(k) = P\{\xi = k\} = (1-p)^k p, \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

$$\text{Тоді } \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z}_+: P\{\xi = n + m / \xi \geq n\} = \frac{P\{\xi = n+m, \xi \geq n\}}{P\{\xi \geq n\}} = \frac{P\{\xi = n+m\}}{\sum_{k=n}^{\infty} P\{\xi = k\}} =$$

$$\frac{(1-p)^{n+m} p}{\sum_{k=n}^{\infty} (1-p)^k p} = \frac{(1-p)^{n+m}}{\frac{(1-p)^n}{1-(1-p)}} = (1-p)^m p = P\{\xi = m\}, \text{ тобто } \xi \text{ має ВВП.}$$

- Нехай ВВ ξ має ВВП. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z}_+$:

$$P\{\xi = n + m / \xi \geq n\} = P\{\xi = m\} \Leftrightarrow \frac{P\{\xi = n+m, \xi \geq n\}}{P\{\xi \geq n\}} = \\ = P\{\xi = m\} \Leftrightarrow \frac{P\{\xi = n+m\}}{P\{\xi \geq n\}} = P\{\xi = m\} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow P\{\xi = n + m\} = P\{\xi \geq n\} \cdot P\{\xi = m\}$. Візьмемо $n = 1$:

$P\{\xi = m+1\} = P\{\xi \geq 1\} \cdot P\{\xi = m\} = (1 - P\{\xi = 0\})P\{\xi = m\}$. Позначивши $P\{\xi = 0\} = p$, маємо: $P\{\xi = m+1\} = (1 - p)P\{\xi = m\}$.

Тоді $\forall k \in \mathbb{N}$: $P\{\xi = k\} = (1 - p)P\{\xi = k - 1\} = (1 - p)^2 P\{\xi = k - 2\} = \dots = (1 - p)^k P\{\xi = 0\} = (1 - p)^k p$, тобто ВВ ξ має геометричний розподіл (з параметром $p = P\{\xi = 0\}$). ►

В доведенні необхідності використовували ВВП тільки при $n = 1$: якщо «пам'ять втрачається» після одного випробування, то тим більше її немає після довільної їх кількості.

4. Від'ємний біномний розподіл (з параметрами $(r; p)$) — $P_{r;p}(\cdot)$

Має 2 параметри — $r \in \mathbb{N}$ та $p \in (0; 1)$. Заданий на $X = \mathbb{Z}_+$.

$$\forall k \in X: P_{r;p}(k) = C_{k+r-1}^{r-1} p^r (1 - p)^k$$

Цей розподіл описує СЕ, який узагальнює попередній і полягає у послідовному проведенні до r -го успіху Н/З ВВ з ймовірністю успіху p в кожному випробуванні. МатМод даного СЕ є ДЙП $\{\Omega; P\}$, де Ω — множина всіх скінченних бінарних кодів, що містять рівно r «1» і закінчуються «1» (i -й символ $\omega \in \Omega$ кодує результат i -го випробування — успіх (1) / невдача (0)), а ймовірність P задана так: $\forall \omega \in \Omega$ $P(\omega) = p^r (1 - p)^{\nu(\omega)}$, де $\nu(\omega)$ — кількість «0» в ω , кількість невдач до r -го успіху. ВВ $\nu: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+$ має від'ємний біномний розподіл з параметрами $(r; p)$, адже $P_\nu(k) = P\{\nu = k\} = \sum_{\omega \in \Omega: \nu(\omega)=k} P(\omega) = p^r (1 - p)^k \cdot [\text{кількість БК з } r - 1 \text{ «1» та } k \text{ «0»}] = C_{r-1+k}^{r-1} p^r (1 - p)^k$ (розташування r -ї «1» фіксоване — останній символ коду).

Розглянемо детальніше цей СЕ і отримуємо ще спосіб побудови ВВ з ВБР:

ТЕОР. Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ — Н/З ВВ, кожна з яких має геометричний розподіл з параметром p . Тоді ВВ $\eta = \sum_{i=1}^r \xi_i$ має ВБР з параметрами $(r; p)$.

5. Гіпергеометричний розподіл, з параметрами $(N; M; n)$ — $P_{N;M;n}(\cdot)$

Має 3 параметри — $N \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{Z}_+$ та $n \in \mathbb{N}$, де $M \leq N$ і $n \leq N$. Заданий на множині $X = \{m_0; m_0 + 1; \dots; m_1 - 1; m_1\}$, де $m_0 = \max\{0; n - N + M\}$, $m_1 = \min\{n; M\}$.

$$\forall m \in X: P_{N;M;n}(m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{m-m}}{C_N^n}.$$

Перевіримо, що це дійсно розподіл. Нехай у нас є N різних об'єктів, серед яких M мають певну «ознаку», а решта $N - M$ — ні. СЕ полягає у виборі навмання n з них. Пронумерувавши усі об'єкти числами $1, 2, \dots, N$ так, щоб перші M номерів отримали об'єкти з «ознакою», запропонуємо МатМод — КМ $\{\Omega; P\}$, де $\Omega = \{\{x_1; \dots; x_n\} \mid x_i = \overline{1, N}; i = \overline{1, n}; x_i \neq x_j, i \neq j\}$, $n(\Omega) = C_N^n$. ВВ $\xi = \xi(\omega): \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+$ на цьому ДЙП — кількість об'єктів з «ознакою» серед вибраних, тобто кількість чисел від 1 до M в ω . Тоді $P_\xi(m) = P\{\xi = m\} = P(A_m)$, де A_m — подія «серед вибраних об'єктів рівно m — з «ознакою».

Серед вибраних об'єктів тих, що з «ознакою», не більше, ніж усього вибрано (n), і не більше, ніж усього об'єктів з «ознакою» (M), тобто $m \leq n$ і $m \leq M$, так що $m \leq \min\{n; M\} = m_1$. З іншого боку, об'єктів з «ознакою» серед вибраних не менше, ніж 0, а без «ознаки» — не більше, ніж усього об'єктів без «ознаки», тобто $n - m \leq N - M \Leftrightarrow m \geq n - N + M$, так що $m \geq \max\{0; n - N + M\} = m_0$.

$m = \overline{m_0, m_1}$. За ФКЙ $P(A_m) = \frac{n(A_m)}{n(\Omega)}$, а $n(A_m) = C_M^m C_{N-M}^{n-m}$. Тому ВВ ξ має вказаний розподіл, і це дійсно розподіл, так як

$$\sum_{m=m_0}^{m_1} P_\xi(m) = \sum_{m=\max\{0; n-N+M\}}^{\min\{n; M\}} P(A_m) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$$

ТЕОР. (Про граничну поведінку гіпергеометричного розподілу).

Нехай $n \in \mathbb{N}$ — фіксоване, а $(N; M) \rightarrow (+\infty; +\infty)$ так, що $\frac{M}{N} \rightarrow p \in (0; 1)$. Тоді $P_{N; M; n}(m) \rightarrow B_{n; p}(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, $m = \overline{0, n}$.

При великих N і M прогноз щодо результату одночасного вибору n об'єктів із N мало відрізняється від прогнозу щодо результату n послідовних виборів одного об'єкта із N з поверненням.

При малих N і M ці прогнози — ймовірності — можуть сильно відрізнятися: наприклад, для $N = 2$, $M = 1$ та $n = 2$ — коли відразу вибираємо 2 об'єкти, то ймовірність того, що серед них рівно один з «ознакою», становитиме 1 (взяли всі N об'єктів, серед них точно M з «ознакою»), а коли 2 рази вибираємо 1 об'єкт з поверненням, то ймовірність того, що рівно 1 раз вибрали об'єкт з «ознакою», дорівнюватиме $B_{2; \frac{1}{2}}(1) = C_2^1 (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$.

Позначення

ОЗН. — Означення.

РЕС. — Нагадування.

ТВ. — Твердження.

ЗАУВ. — Зауваження.

ПР. — Приклад.

В. — Властивість.

Н. — Наслідок.

ЛЕМА. — Лема.

ТЕОР. — Теорема.

◀ — Початок доведення.

▶ — Кінець доведення.

тоді́дот — тоді й тільки тоді.

⊗ — протиріччя.

Список рекомендованої літератури

- [1] Босс В. Лекции по математике. Том 4: Вероятность, информация, статистика [Текст] / В. Босс. — М., КомКнига. — 2005. — 216 с.
- [2] Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] / В. Е. Гмурман. — М., Высшая школа. — 2003. — 479 с.
- [3] Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей [Текст] / Б. В. Гнеденко. — М., Едиториал УРСС. — 2005. — 448 с.
- [4] Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей [Текст] / А. Н. Колмогоров. — М., Наука. — 1974. — 120 с.
- [5] Мостеллер Ф. Вероятность [Текст] / Ф. Мостеллер, Р. Рурке, Дж. Томас. — М., Мир. — 1969. — 432 с.
- [6] Турчин В. Н. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] / В. Н. Турчин. — Д., Изд-во ДНУ. — 2008. — 656 с.
- [7] Тутубалин В. Н. Теория вероятностей и случайных процессов [Текст] / В. Н. Тутубалин. — М., Изд-во МГУ. — 1992. — 400 с.

Навчально-методичне видання

Гончаров Сергій Валерійович

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
ІЗ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ
ДЛЯ СТУДЕНТІВ
ФІЗИЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Видання друкується в авторській редакції

Відповідальний редактор *Біла К. О.*
Технічний редактор *Олексенко Н. С.*

Підп. до друку 24.04.18. Формат 60x84 1/16.
Ум. друк. арк. 1,5. Тираж 35 пр. Зам. № 0418-04/2.

Видавець та виготовлювач СПД Біла К. О.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єктів видавничої справи ДК № 3618 від 06.11.09

Надруковано на поліграфічній базі видавничо-поліграфічного центру «Імпакт»
Україна, 49000, м. Дніпро, пр. Д. Яворницького, 111, оф. 2
+38 (099) 7805049; +38 (067) 2100256
www.impact.dp.ua
e-mail: impact.dnepr@gmail.com