

Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара



Я. С. Бондаренко, С. В. Кравченко, К. М. Сологуб

ПОСІБНИК ДО ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ
“БАЙЄСІВСЬКИЙ АНАЛІЗ ДАНИХ”

Дніпро
2018

УДК 519.226
Б81

Рецензенти: канд. фіз.-мат. наук, доц. М.Є. Ткаченко,
канд. фіз.-мат. наук, доц. Н.І. Послайко

Б81 Бондаренко, Я. С. Посібник до вивчення дисципліни “Байєсівський аналіз даних” [Текст] / Я.С. Бондаренко, С.В. Кравченко, К.М. Сологуб. – Д: Ліра, 2018. – 40 с.

Вивчено математичні моделі А/В та А/В/С тестування цільової сторінки сайту при байєсівському методі статистичного оцінювання.

Для студентів механіко-математичного факультету ДНУ спеціальності “Статистика”.

*Рекомендовано до друку вченою радою
механіко-математичного факультету
Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара
протокол №4 від 18.12.2018 року*

Навчальне видання

Яна Сергіївна Бондаренко
Сергій Вікторович Кравченко
Катерина Миколаївна Сологуб

**Посібник до вивчення дисципліни
“Байєсівський аналіз даних”**

Друкується за авторською редакцією

Підписано до друку 21.12.18. Формат 60×84/16. Папір друкарський.
Друк плоский. Ум. друк. арк. 2,33. Тираж 20 пр. Зам. № 377.

Друкарня «Ліра», вул. Наукова, 5, м. Дніпро, 49107. Свідоцтво про
внесення до Державного реєстру серія ДК №6042 від 26.02.2018 р.

© Бондаренко Я.С., Кравченко С.В., Сологуб К.М., 2018

ВСТУП

Планування експерименту без апіорної інформації про статистичні властивості випадкової величини, яка спостерігатиметься, відбувається досить рідко. Класичні методи незміщеного оцінювання та оцінювання за методом максимальної правдоподібності не дають способів врахування апіорного знання. Теорія байєсівського оцінювання дозволяє об'єднати апіорну інформацію з величинами, які спостерігаються в експерименті. Основна відмінність між байєсівським і небайєсівським підходами полягає в тому, що байєсівський підхід розглядає параметр розподілу як випадкову величину, в той час як небайєсівський вважає його фіксованою точкою.

Розглянемо схему реалізації байєсівського оцінювання невідомих параметрів, наведену на рис. 1. Апіорна інформація може бути здобута під час попередніх теоретичних або експериментальних досліджень. Апіорна інформація задається апіорним розподілом вектору параметрів $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)$. Емпірична інформація задається реалізацією вибіркового вектору $y = (y_1, \dots, y_n)$. Сформулюємо теорему Байєса для абсолютно неперервних випадкових величин.

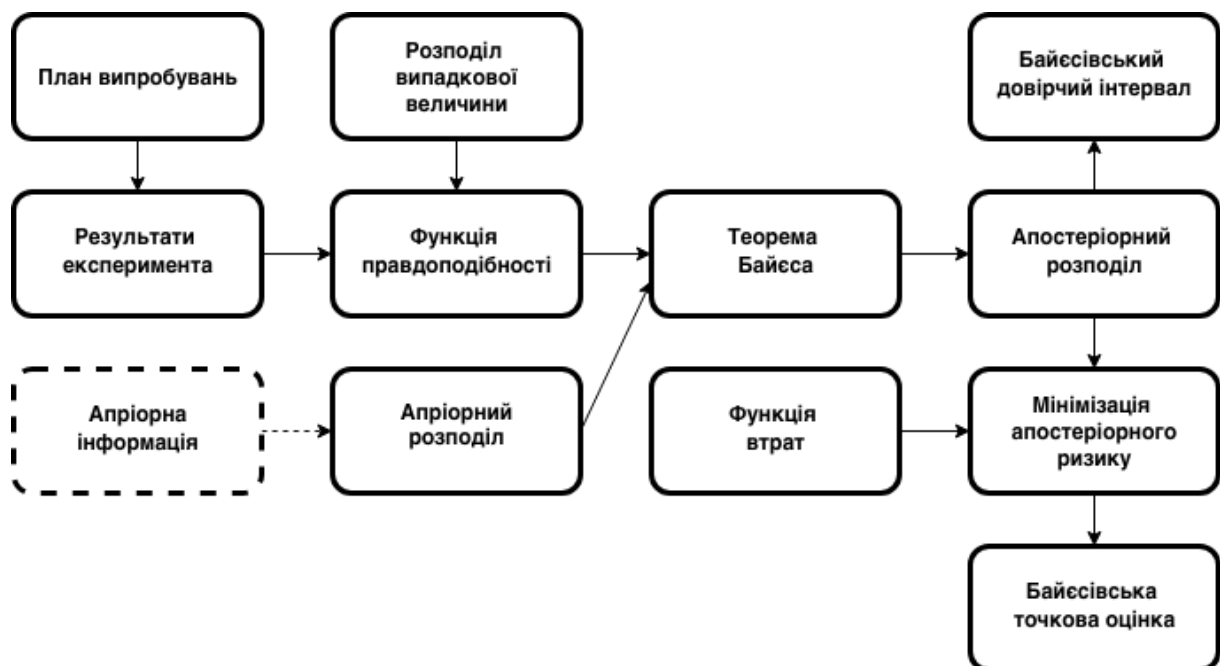


Рис. 1. Байєсівський метод статистичного оцінювання

Позначимо через $p(y, \theta)$ спільну щільність розподілу ймовірностей для вибіркового вектору $y = (y_1, \dots, y_n)$ і вектору параметрів $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)$. Тоді

$$p(y, \theta) = p(y|\theta)p(\theta) = p(\theta|y)p(y),$$

$$p(\theta|y) = \frac{p(\theta)p(y|\theta)}{p(y)},$$

де

$$p(y) = \int p(\theta)p(y|\theta)d\theta.$$

Теорему Байєса часто записують у вигляді:

$$p(\theta|y) \sim p(\theta)p(y|\theta),$$

де знак $\sim$ означає пропорційність, $p(\theta|y)$ – апостеріорна щільність розподілу ймовірностей вектору параметрів θ за умови заданої вибірки y , $p(\theta)$ – апріорна щільність розподілу ймовірностей вектору параметрів θ , а $p(y|\theta)$, як функція від θ , є функцією максимальної правдоподібності.

Апостеріорна щільність розподілу ймовірностей $p(\theta|y)$ містить як апріорну, так і емпіричну інформацію: апріорна інформація подана апріорною щільністю розподілу ймовірностей, емпірична інформація – функцією максимальної правдоподібності. Апостеріорна щільність розподілу ймовірностей $p(\theta|y)$ використовується в байєсівському аналізі для здобуття висновків відносно вектору параметрів θ .

Функція втрат $L(\theta, \hat{\theta})$ визначає похибку при заміні значення параметра θ його оцінкою $\hat{\theta}$. За байєсівську точкову оцінку параметра θ приймається точка $\hat{\theta}$, в якій функція апостеріорного ризику

$$ML(\theta, \hat{\theta}) = \int_{\theta} L(\theta, \hat{\theta})p(\theta|y)d\theta$$

досягає найменшого значення.

Байєсівська інтервальна оцінка (довірчий інтервал) будується за апостеріорною щільністю розподілу ймовірностей $p(\theta|y)$.

Розглянемо послідовну процедуру застосування теореми Байєса. Нехай апіорна щільність розподілу ймовірностей для вектору параметрів θ дорівнює $p(\theta)$ і ми здобули вибіркового вектор y_1 зі щільністю розподілу ймовірностей $p(y_1|\theta)$.

Згідно з теоремою Байєса апостеріорна щільність розподілу ймовірностей дорівнює

$$p(\theta|y_1) \sim p(\theta)p(y_1|\theta).$$

Якщо ми отримали новий вибіркового вектор y_2 , незалежно від вибіркового вектору y_1 , зі щільністю розподілу ймовірностей $p(y_2|\theta)$, то ми можемо побудувати апостеріорну щільність розподілу ймовірностей для вектору параметрів θ так. Візьмемо апостеріорну щільність розподілу ймовірностей $p(\theta|y_1)$ за апіорну щільність розподілу ймовірностей для нового вибіркового вектору y_2 і згідно з теоремою Байєса отримаємо

$$p(\theta|y_1, y_2) \sim p(\theta|y_1)p(y_2|\theta),$$

де $p(\theta|y_1, y_2)$ – апостеріорна щільність розподілу ймовірностей вектору параметрів θ .

Відмітимо, що, оскільки

$$p(\theta|y_1) \sim p(\theta)p(y_1|\theta),$$

то $p(\theta|y_1, y_2)$ можна переписати у вигляді

$$p(\theta|y_1, y_2) \sim p(\theta)p(y_1|\theta)p(y_2|\theta),$$

де $p(y_1|\theta)p(y_2|\theta)$ – функція максимальної правдоподібності для θ .

Апостеріорна функція щільності розподілу ймовірностей $p(\theta|y_1, y_2)$ однакова незалежно від того, здійснюємо ми послідовну процедуру: переходимо від $p(\theta)$ до $p(\theta|y_1)$, а потім від $p(\theta|y_1)$ до $p(\theta|y_1, y_2)$, або ми відразу використовуємо функцію максимальної правдоподібності $p(y_1, y_2|\theta)$ для двох вибірок разом з апіорною щільністю розподілу ймовірностей $p(\theta)$. Властивість процедури об'єднання апіорної інформації з інформацією послідовних вибіркового векторів зберігається й для випадків, коли число незалежних вибірок більше двох. Поступово вибіркова інформація починає домінувати в апостеріорному розподілі.

1. Байєсівське A/B тестування

1.1. Термінологія електронної комерції

Цільова сторінка (Landing Page) – сторінка, на яку переходить відвідувач, залучений за допомогою реклами, систем пошуку, поштової розсилки.

Заклик до дії (Call-to-Action) – елемент цільової сторінки (кнопка, текстове посилання, зображення), який спонукає відвідувача на цільову дію. Зовнішній вигляд елемента має виділятися серед контенту сторінки, оскільки саме він перетворює відвідувача на користувача.

Цільова дія (Conversion Action) – дія відвідувача, яка значуща для власника сайту (скачування безкоштовного контенту, реєстрація, підписка на розсилку, покупка товару, заказ послуги).

Унікальний відвідувач (Unique Visitor) – відвідувач з унікальними характеристиками (IP-адреса, браузер, реєстраційні дані), який зайшов на цільову сторінку протягом деякого проміжку часу (доба/тиждень/місяць).

Користувач (User) – відвідувач, який взаємодіє з цільовою сторінкою.

Оригінальна сторінка (Baseline) – базовий варіант цільової сторінки.

Варіація (Variation) – альтернативний варіант цільової сторінки.

Конверсія (Conversion) – цільова дія, яку відвідувач виконав на сторінці сайту.

Коефіцієнт конверсії (Conversion Rate) – відношення числа конверсій до загальної кількості відвідувачів.

Оптимізація цільової сторінки (Landing Page Optimization) – процес вдосконалення елементів цільової сторінки з метою максимізації коефіцієнту конверсії.

A/B тестування (A/B testing) – метод оптимізації оригінальної цільової сторінки. Оригінальна сторінка та її варіація мають бути однакові за виключенням одного елемента, вплив якого на сприйняття відвідувачів перевіряється під час тестування.

1.2. Постановка задачі A/B тестування

Нехай в двох групах відвідувачів (групі А та групі В) проводяться незалежні випробування Бернуллі з імовірностями успіху θ_A, θ_B в кожній групі в одному випробуванні. Імовірності успіху (коефіцієнти конверсії) θ_A, θ_B невідомі випадкові величини.

Щільність $p(\theta_A)$ – апіорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_A , щільність $p(\theta_B)$ – апіорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_B , щільність $p(\theta_A|x_1, x_2, \dots, x_n)$ – апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_A за умови заданого вибіркового вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, щільність $p(\theta_B|y_1, y_2, \dots, y_n)$ – апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_B за умови заданого вибіркового вектора $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Функція втрат $L(\theta_A, \theta_B, \cdot)$ характеризує втрати внаслідок неправильно прийнятого рішення щодо вибору варіанту сторінки для розміщення на сайті. Функція втрат дорівнює

$$L(\theta_A, \theta_B, A) = \max\{\theta_B - \theta_A, 0\}$$

при виборі варіанту сторінки, який пропонують для перегляду групі А, і

$$L(\theta_A, \theta_B, B) = \max\{\theta_A - \theta_B, 0\}$$

при виборі варіанту сторінки, який пропонують для перегляду групі В.

Необхідно знайти точкові байєсівські оцінки $\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B$ імовірностей успіху θ_A, θ_B відносно функції втрат $L(\theta_A, \theta_B, \cdot)$.

Обчислити ймовірність того, що ймовірність успіху в групі В більша за ймовірність успіху в групі А.

1.3. Апостеріорна щільність розподілу ймовірностей

Нехай в групі А проводяться незалежні випробування Бернуллі з двома наслідками: $\{x = 1\}$ – успіх, $\{x = 0\}$ – неуспіх. Число успіхів в одному випробуванні має розподіл Бернуллі з параметром θ_A :

$$P(x, \theta_A) = \theta_A^x (1 - \theta_A)^{1-x}, x = 0, 1; 0 < \theta_A < 1.$$

Функція максимальної правдоподібності задається рівністю

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta_A) &= \theta_A^{x_1} (1 - \theta_A)^{1-x_1} \dots \theta_A^{x_n} (1 - \theta_A)^{1-x_n} = \\ &= \theta_A^{\sum_{i=1}^n x_i} (1 - \theta_A)^{n - \sum_{i=1}^n x_i}. \end{aligned}$$

Апріорна інформація щодо імовірності успіху θ_A задана щільністю бета-розподілу з параметрами (a, b) :

$$p(\theta_A) = \frac{\theta_A^{a-1} (1 - \theta_A)^{b-1}}{B(a, b)}, 0 \leq \theta_A \leq 1.$$

Згідно з теоремою Байєса апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_A дорівнює

$$\begin{aligned} p(\theta_A | x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{p(\theta_A) p(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta_A)}{\int_0^1 p(\theta_A) p(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta_A) d\theta_A}, \\ p(\theta_A | x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{\theta_A^{a-1} (1 - \theta_A)^{b-1} \theta_A^{\sum_{i=1}^n x_i} (1 - \theta_A)^{n - \sum_{i=1}^n x_i}}{\int_0^1 \theta_A^{a-1} (1 - \theta_A)^{b-1} \theta_A^{\sum_{i=1}^n x_i} (1 - \theta_A)^{n - \sum_{i=1}^n x_i} d\theta_A}, \\ p(\theta_A | x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{\theta_A^{a + \sum_{i=1}^n x_i - 1} (1 - \theta_A)^{b + n - \sum_{i=1}^n x_i - 1}}{B(a + \sum_{i=1}^n x_i, b + n - \sum_{i=1}^n x_i)}, \end{aligned}$$

отже, апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_A – щільність бета-розподілу з параметрами $(\tilde{a}, \tilde{b})$:

$$p(\theta_A | x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\theta_A^{\tilde{a}-1} (1 - \theta_A)^{\tilde{b}-1}}{B(\tilde{a}, \tilde{b})},$$

де

$$\tilde{a} = a + \sum_{i=1}^n x_i, \quad \tilde{b} = b + n - \sum_{i=1}^n x_i.$$

Нехай в групі В проводяться незалежні випробування Бернуллі з двома наслідками: $\{y = 1\}$ – успіх, $\{y = 0\}$ – неуспіх. Число успіхів в одному випробуванні має розподіл Бернуллі з параметром θ_B :

$$P(y, \theta_B) = \theta_B^y (1 - \theta_B)^{1-y}, y = 0, 1; 0 < \theta_B < 1.$$

Функція максимальної правдоподібності задається рівністю

$$\begin{aligned} p(y_1, y_2, \dots, y_n | \theta_B) &= \theta_B^{y_1} (1 - \theta_B)^{1-y_1} \dots \theta_B^{y_n} (1 - \theta_B)^{1-y_n} = \\ &= \theta_B^{\sum_{i=1}^n y_i} (1 - \theta_B)^{n - \sum_{i=1}^n y_i}. \end{aligned}$$

Апріорна інформація щодо параметра θ_B задана щільністю бета-розподілу з параметрами (c, d) :

$$p(\theta_B) = \frac{\theta_B^{c-1} (1 - \theta_B)^{d-1}}{B(c, d)}, 0 \leq \theta_B \leq 1.$$

Згідно з теоремою Байєса апостеріорна щільність розподілу ймовірностей для параметра θ_B дорівнює

$$\begin{aligned} p(\theta_B | y_1, y_2, \dots, y_n) &= \frac{p(\theta_B) p(y_1, y_2, \dots, y_n | \theta_B)}{\int p(\theta_B) p(y_1, y_2, \dots, y_n | \theta_B) d\theta_B}, \\ p(\theta_B | y_1, y_2, \dots, y_n) &= \frac{\theta_B^{c-1} (1 - \theta_B)^{d-1} \theta_B^{\sum_{i=1}^n y_i} (1 - \theta_B)^{n - \sum_{i=1}^n y_i}}{\int_0^1 \theta_B^{c-1} (1 - \theta_B)^{d-1} \theta_B^{\sum_{i=1}^n y_i} (1 - \theta_B)^{n - \sum_{i=1}^n y_i} d\theta_B}, \\ p(\theta_B | y_1, y_2, \dots, y_n) &= \frac{\theta_B^{c + \sum_{i=1}^n y_i - 1} (1 - \theta_B)^{d + n - \sum_{i=1}^n y_i - 1}}{B(c + \sum_{i=1}^n y_i, d + n - \sum_{i=1}^n y_i)}, \end{aligned}$$

отже, апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_B – щільність бета-розподілу з параметрами $(\tilde{c}, \tilde{d})$:

$$p(\theta_B | y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{\theta_B^{\tilde{c}-1} (1 - \theta_B)^{\tilde{d}-1}}{B(\tilde{c}, \tilde{d})},$$

де

$$\tilde{c} = c + \sum_{i=1}^n y_i, \quad \tilde{d} = d + n - \sum_{i=1}^n y_i.$$

1.4. Обчислення ймовірності $P\{\theta_B > \theta_A\}$

Спільна щільність розподілу ймовірностей успіхів в двох групах А і В дорівнює добутку щільності розподілу ймовірності успіху в групі А та щільності розподілу ймовірності успіху в групі В:

$$p(\theta_A, \theta_B; a, b, c, d) = p(\theta_A; a, b)p(\theta_B; c, d).$$

Обчислимо ймовірність того, що ймовірність успіху в групі В більша за ймовірність успіху в групі А:

$$\begin{aligned} P\{\theta_B > \theta_A\} &= P\{\theta_B - \theta_A > 0\} = \iint_{y-x>0} p(x, y) dx dy = \\ &= \int_0^1 \int_x^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a, b)} \frac{y^{c-1}(1-y)^{d-1}}{B(c, d)} dy dx = \\ &= 1 - \int_0^1 \int_0^x \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a, b)} \frac{y^{c-1}(1-y)^{d-1}}{B(c, d)} dy dx. \end{aligned}$$

Розглянемо регуляризовану неповну бета-функцію:

$$I_x(c, d) = \int_0^x \frac{y^{c-1}(1-y)^{d-1}}{B(c, d)} dy = 1 - \sum_{i=0}^{c-1} \frac{x^i(1-x)^d}{(d+i)B(1+i, d)}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} P\{\theta_B > \theta_A\} &= 1 - \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a, b)} I_x(c, d) dx = \\ &= 1 - \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a, b)} \left(1 - \sum_{i=0}^{c-1} \frac{x^i(1-x)^d}{(d+i)B(1+i, d)} \right) dx = \\ &= 1 - \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a, b)} dx + \sum_{i=0}^{c-1} \int_0^1 \frac{x^{a-1+i}(1-x)^{b-1+d}}{(d+i)B(1+i, d)B(a, b)} dx = \\ &= \sum_{i=0}^{c-1} \frac{B(a+i, b+d)}{(d+i)B(1+i, d)B(a, b)} \int_0^1 \frac{x^{a-1+i}(1-x)^{b-1+d}}{B(a+i, b+d)} dx = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{c-1} \frac{B(a+i, b+d)}{(d+i)B(1+i, d)B(a, b)}.$$

Ймовірність того, що ймовірність успіху в групі А більша за ймовірність успіху в групі В дорівнює

$$P\{\theta_A > \theta_B\} = 1 - \sum_{i=0}^{c-1} \frac{B(a+i, b+d)}{(d+i)B(1+i, d)B(a, b)}.$$

Далі позначатимемо через $h(a, b, c, d)$ таку функцію:

$$h(a, b, c, d) = 1 - \sum_{i=0}^{c-1} \frac{B(a+i, b+d)}{(d+i)B(1+i, d)B(a, b)}.$$

1.5. Математичне сподівання функції втрат $L(\theta_A, \theta_B, \cdot)$

Математичне сподівання (середнє значення) функції втрат дорівнює

$$ML(\theta_A, \theta_B, A) = \int_0^1 \int_0^1 L(x, y, A) p(x, y) dx dy$$

при виборі варіанту сторінки, який пропонують для перегляду групі А, та

$$ML(\theta_A, \theta_B, B) = \int_0^1 \int_0^1 L(x, y, B) p(x, y) dx dy$$

при виборі варіанту сторінки, який пропонують для перегляду групі В.

Обчислимо математичне сподівання функції втрат при виборі варіанту сторінки, який пропонують для перегляду групі А:

$$\begin{aligned} ML(\theta_A, \theta_B, A) &= \int_0^1 \int_0^1 L(x, y, A) p(x, y) dx dy = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \max\{y - x, 0\} p(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_x^1 (y - x) p(x, y) dy dx = \\ &= \int_0^1 \int_x^1 (y - x) \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a, b)} \frac{y^{c-1}(1-y)^{d-1}}{B(c, d)} dy dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_x^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)} \frac{y^c(1-y)^{d-1}}{B(c,d)} dy dx \\
&\quad - \int_0^1 \int_x^1 \frac{x^a(1-x)^{b-1}}{B(a,b)} \frac{y^{c-1}(1-y)^{d-1}}{B(c,d)} dy dx = \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)} \frac{B(c+1,d)}{B(c,d)} \frac{y^{(c+1)-1}(1-y)^{d-1}}{B(c+1,d)} dy \right. \\
&\quad \left. - \int_0^x \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)} \frac{B(c+1,d)}{B(c,d)} \frac{y^{(c+1)-1}(1-y)^{d-1}}{B(c+1,d)} dy \right] dx - \\
&\quad - \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{B(a+1,b)}{B(a,b)} \frac{x^a(1-x)^{b-1}}{B(a+1,b)} \frac{y^{c-1}(1-y)^{d-1}}{B(c,d)} dy - \right. \\
&\quad \left. - \int_0^x \frac{B(a+1,b)}{B(a,b)} \frac{x^a(1-x)^{b-1}}{B(a+1,b)} \frac{y^{c-1}(1-y)^{d-1}}{B(c,d)} dy \right] dx = \\
&= \frac{B(c+1,d)}{B(c,d)} \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)} \left[1 - \int_0^x \frac{y^{(c+1)-1}(1-y)^{d-1}}{B(c+1,d)} dy \right] dx - \\
&\quad - \frac{B(a+1,b)}{B(a,b)} \int_0^1 \frac{x^{(a+1)-1}(1-x)^{b-1}}{B(a+1,b)} \left[1 - \int_0^x \frac{y^{c-1}(1-y)^{d-1}}{B(c,d)} dy \right] dx = \\
&= \frac{B(c+1,d)}{B(c,d)} - \frac{B(c+1,d)}{B(c,d)} \int_0^1 \int_0^x \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)} \frac{y^{(c+1)-1}(1-y)^{d-1}}{B(c+1,d)} dy dx - \\
&\quad - \frac{B(a+1,b)}{B(a,b)} + \frac{B(a+1,b)}{B(a,b)} \int_0^1 \int_0^x \frac{x^{(a+1)-1}(1-x)^{b-1}}{B(a+1,b)} \frac{y^{c-1}(1-y)^{d-1}}{B(c,d)} dy dx.
\end{aligned}$$

Розглянемо регуляризовану неповну бета-функцію:

$$I_x(c, d) = \int_0^x \frac{y^{c-1}(1-y)^{d-1}}{B(c, d)} dy.$$

Маємо:

$$\begin{aligned}
ML(\theta_A, \theta_B, A) &= \frac{B(c+1, d)}{B(c, d)} \left(1 - \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a, b)} I_x(c+1, d) dx \right) - \\
&\quad - \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} \left(1 - \int_0^1 \frac{x^{(a+1)-1}(1-x)^{b-1}}{B(a+1, b)} I_x(c, d) dx \right) = \\
&\quad \frac{B(c+1, d)}{B(c, d)} \left(1 - \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a, b)} \left(1 - \sum_{i=0}^c \frac{x^i(1-x)^d}{(d+i)B(1+i, d)} \right) dx \right) - \\
&\quad - \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} \left(1 - \int_0^1 \frac{x^{(a+1)-1}(1-x)^{b-1}}{B(a+1, b)} \left(1 - \sum_{i=0}^{c-1} \frac{x^i(1-x)^d}{(d+i)B(1+i, d)} \right) dx \right).
\end{aligned}$$

Обчислимо перший доданок:

$$\begin{aligned}
&\frac{B(c+1, d)}{B(c, d)} \left(1 - \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a, b)} \left(1 - \sum_{i=0}^c \frac{x^i(1-x)^d}{(d+i)B(1+i, d)} \right) dx \right) = \\
&\frac{B(c+1, d)}{B(c, d)} \left(1 - \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a, b)} dx + \sum_{i=0}^c \int_0^1 \frac{x^{i+a-1}(1-x)^{b+d-1}}{B(a, b)(d+i)B(1+i, d)} dx \right) = \\
&\frac{B(c+1, d)}{B(c, d)} \sum_{i=0}^c \frac{B(a+i, b+d)}{B(a, b)(d+i)B(1+i, d)} = \frac{B(c+1, d)}{B(c, d)} (1 - h(a, b, c+1, d)).
\end{aligned}$$

Обчислимо другий доданок:

$$\begin{aligned}
&\frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} \left(1 - \int_0^1 \frac{x^{(a+1)-1}(1-x)^{b-1}}{B(a+1, b)} \left(1 - \sum_{i=0}^{c-1} \frac{x^i(1-x)^d}{(d+i)B(1+i, d)} \right) dx \right) = \\
&= \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} \left(1 - \int_0^1 \frac{x^{(a+1)-1}(1-x)^{b-1}}{B(a+1, b)} dx + \sum_{i=0}^{c-1} \int_0^1 \frac{x^{(i+a+1)-1}(1-x)^{b+d-1}}{B(a+1, b)(d+i)B(1+i, d)} dx \right) = \\
&= \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} \sum_{i=0}^{c-1} \frac{B(i+a+1, b+d)}{B(a+1, b)(d+i)B(1+i, d)} = \\
&= \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} (1 - h(a+1, b, c, d)).
\end{aligned}$$

Отже, математичне сподівання функції втрат при виборі варіанту сторінки, який пропонують для перегляду групі А, дорівнює

$$\begin{aligned}
 ML(\theta_A, \theta_B, A) &= \int_0^1 \int_x^1 (y - x) p(x, y) dy dx = \\
 &= \frac{B(c + 1, d)}{B(c, d)} (1 - h(a, b, c + 1, d)) - \frac{B(a + 1, b)}{B(a, b)} (1 - h(a + 1, b, c, d)).
 \end{aligned}$$

Тепер обчислимо математичне сподівання функції втрат при виборі варіанту сторінки, який пропонують для перегляду групі В:

$$\begin{aligned}
 ML(\theta_A, \theta_B, B) &= \int_0^1 \int_0^1 L(\theta_A, \theta_B, B) p(x, y) dx dy = \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 \max\{x - y, 0\} p(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^x (x - y) p(x, y) dy dx = \\
 &= \int_0^1 \int_0^x (x - y) \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a, b)} \frac{y^{c-1}(1-y)^{d-1}}{B(c, d)} dy dx = \\
 &= \int_0^1 \int_0^x \frac{x^a(1-x)^{b-1}}{B(a, b)} \frac{y^{c-1}(1-y)^{d-1}}{B(c, d)} dy dx - \\
 &\quad - \int_0^1 \int_0^x \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a, b)} \frac{y^{(c+1)-1}(1-y)^{d-1}}{B(c, d)} dy dx = \\
 &= \int_0^1 \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} \frac{x^{(a+1)-1}(1-x)^{b-1}}{B(a+1, b)} I_x(c, d) dx - \\
 &\quad - \int_0^1 \frac{B(c+1, d)}{B(c, d)} \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a, b)} I_x(c+1, d) dx = \\
 &= \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} \int_0^1 \frac{x^{(a+1)-1}(1-x)^{b-1}}{B(a+1, b)} \left(1 - \sum_{i=0}^{c-1} \frac{x^i(1-x)^d}{(d+i)B(1+i, d)} \right) dx -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{B(c+1, d)}{B(c, d)} \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a, b)} \left(1 - \sum_{i=0}^c \frac{x^i(1-x)^d}{(d+i)B(1+i, d)} \right) dx = \\
& = \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} \left[1 - \sum_{i=0}^{c-1} \int_0^1 \frac{x^{(i+a+1)-1}(1-x)^{b+d-1}}{B(a+1, b)(d+i)B(1+i, d)} dx \right] - \\
& - \frac{B(c+1, d)}{B(c, d)} \left[1 - \sum_{i=0}^c \int_0^1 \frac{x^{(i+a)-1}(1-x)^{b+d-1}}{B(a, b)(d+i)B(1+i, d)} dx \right] = \\
& = \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} \left[1 - \sum_{i=0}^{c-1} \frac{B(i+a+1, b+d)}{B(a+1, b)(d+i)B(1+i, d)} \right] - \\
& - \frac{B(c+1, d)}{B(c, d)} \left[1 - \sum_{i=0}^c \frac{B(i+a, b+d)}{B(a, b)(d+i)B(1+i, d)} \right] = \\
& = \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} h(a+1, b, c, d) - \frac{B(c+1, d)}{B(c, d)} h(a, b, c+1, d).
\end{aligned}$$

1.6. Реалізація байєсівського А/В тестування

При А/В тестуванні першій (базовій) групі відвідувачів пропонують до перегляду сторінку А, другій (експериментальній) групі відвідувачів пропонують до перегляду сторінку В (варіацію сторінки А). Для збереження чистоти експерименту необхідно ідентифікувати відвідувачів під час тестування та при повторних відвідуваннях сайту пропонувати їм до перегляду ту саму сторінку А або В, яку вони бачили попереднього разу.

Моделюється потік відвідувачів. Кожен відвідувач з імовірністю $\frac{1}{2}$ може потрапити до першої групи й з імовірністю $\frac{1}{2}$ може потрапити до другої групи. Після того, як відвідувач опинився в одній із двох груп, моделюється його поведінка. Поведінка відвідувача однозначно визначається двома подіями: успіх – відвідувач виконав цільову дію, неуспіх – відвідувач не виконав цільову дію. Якщо відвідувач опинився в першій групі, то подія успіх відбувається з імовірністю θ_A . Якщо

відвідувач опинився в другій групі, то подія успіх відбувається з імовірністю θ_B .

Апріорна інформація про розподіл невідомої ймовірності успіху θ_A подана щільністю бета-розподілу з параметрами (a, b) , апріорна інформація про розподіл невідомої ймовірності успіху θ_B подана щільністю бета-розподілу з параметрами (c, d) .

Згідно з теоремою Байєса апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_A є щільністю бета-розподілу з параметрами:

$$\tilde{a} = a + x_i, \quad \tilde{b} = b + (1 - x_i),$$

де x_i – число успіхів в одному випробуванні ($x_i = 0$ або 1),

апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_B є щільністю бета-розподілу з параметрами:

$$\tilde{c} = c + y_i, \quad \tilde{d} = d + (1 - y_i),$$

де y_i – число успіхів в одному випробуванні ($y_i = 0$ або 1).

Імовірність того, що ймовірність успіху в групі В більша за ймовірність успіху в групі А дорівнює

$$P\{\theta_B > \theta_A\} = 1 - h(a, b, c, d),$$

імовірність того, що ймовірність успіху в групі А більша за ймовірність успіху в групі В дорівнює

$$P\{\theta_A > \theta_B\} = h(a, b, c, d).$$

Математичні сподівання функцій втрат порівнюються із рівнем допустимих втрат ε після кожного відвідування сторінки А або сторінки В.

Якщо $ML(\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B, A) \leq \varepsilon$, $ML(\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B, B) > \varepsilon$, тестування зупиняється, варіант сторінки, який пропонують для перегляду групі А, обирається для розміщення на сайті. Якщо $ML(\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B, A) > \varepsilon$, $ML(\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B, B) \leq \varepsilon$, тестування зупиняється, варіант сторінки, який пропонують для перегляду групі В, обирається для розміщення на сайті.

На рисунках 1.6.1–1.6.5 зображено процес реалізації тестування.

На рисунку 1.6.1 наведені апріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_A (щільність бета-розподілу з параметрами $(1, 1)$) зображена бла-

китним кольором), апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_B (щільність бета-розподілу з параметрами (1,1) зображена червоним кольором). Імовірність того, що ймовірність успіху в одній групі більша за ймовірність успіху в іншій групі дорівнює

$$P\{\theta_A > \theta_B\} = 0,5, \quad P\{\theta_B > \theta_A\} = 0,5.$$

На рисунку 1.6.2 наведені апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_A (щільність бета-розподілу з параметрами $a = 4, b = 5$ зображена блакитним кольором), апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_B (щільність бета-розподілу з параметрами $c = 2, d = 2$ зображена червоним кольором). Імовірність того, що ймовірність успіху в одній групі більша за ймовірність успіху в іншій групі дорівнює

$$P\{\theta_A > \theta_B\} = 0,42, \quad P\{\theta_B > \theta_A\} = 0,58.$$

На рисунку 1.6.3 наведені апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_A (щільність бета-розподілу з параметрами $a = 4, b = 6$ зображена блакитним кольором), апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_B (щільність бета-розподілу з параметрами $c = 3, d = 2$ зображена червоним кольором). Імовірність того, що ймовірність успіху в одній групі більша за ймовірність успіху в іншій групі дорівнює

$$P\{\theta_A > \theta_B\} = 0,22, \quad P\{\theta_B > \theta_A\} = 0,78.$$

На рисунку 1.6.4 наведені апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_A (щільність бета-розподілу з параметрами $a = 5, b = 7$ зображена блакитним кольором), апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_B (щільність бета-розподілу з параметрами $c = 4, d = 2$ зображена червоним кольором). Імовірність того, що ймовірність успіху в одній групі більша за ймовірність успіху в іншій групі дорівнює

$$P\{\theta_A > \theta_B\} = 0,14, \quad P\{\theta_B > \theta_A\} = 0,86.$$

На рисунку 1.6.5 наведені апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_A (щільність бета-розподілу з параметрами $a = 5, b = 7$ зображена блакитним кольором), апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_B (щільність бета-розподілу з параметрами $c = 8, d = 2$ зображена червоним кольором). Імовірність того, що ймовірність успіху в одній групі більша за ймовірність успіху в іншій групі дорівнює

$$P\{\theta_A > \theta_B\} = 0,04, \quad P\{\theta_B > \theta_A\} = 0,96.$$

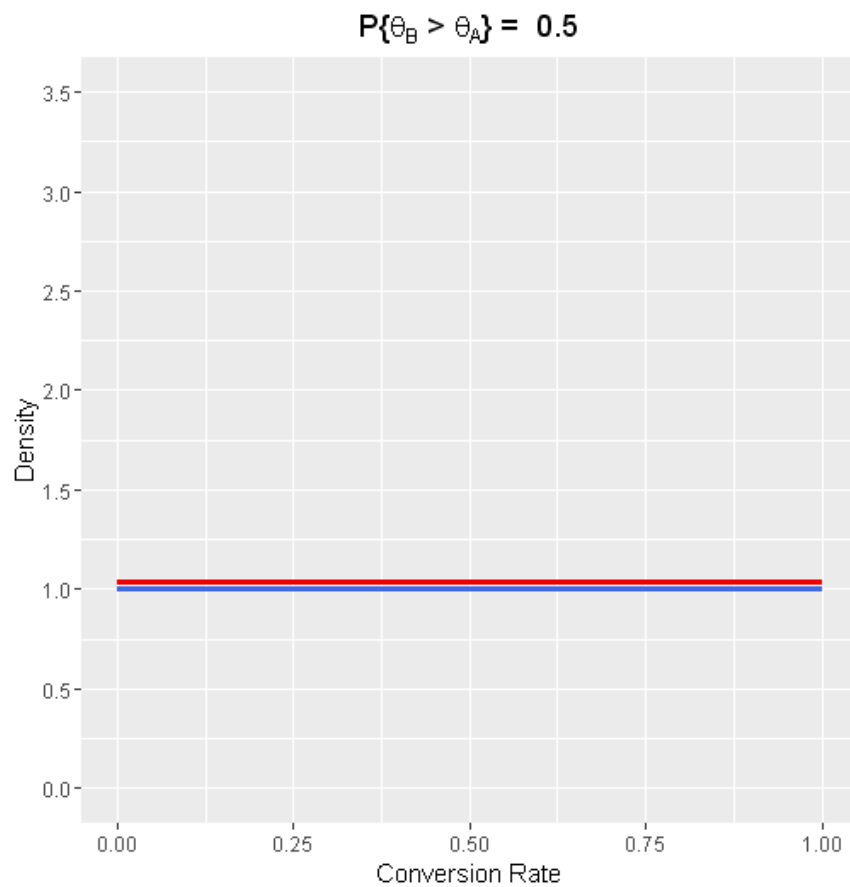


Рис. 1.6.1. Апріорні щільності розподілу коефіцієнтів конверсії θ_A і θ_B

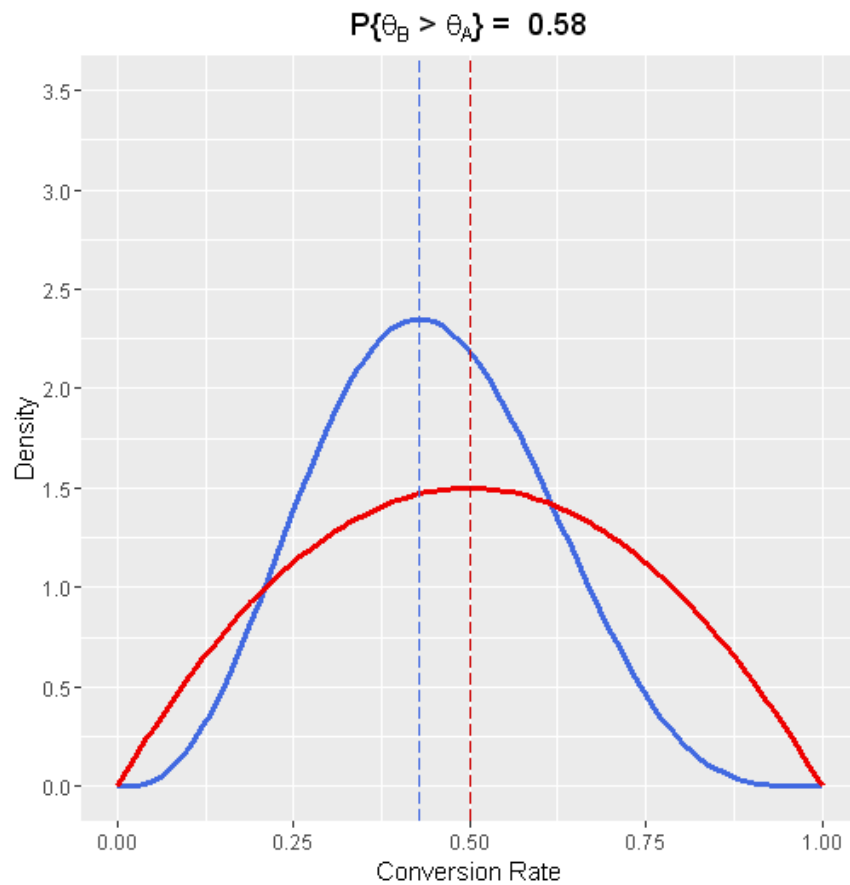


Рис. 1.6.2. Апостеріорні щільності розподілу коефіцієнтів конверсії θ_A і θ_B

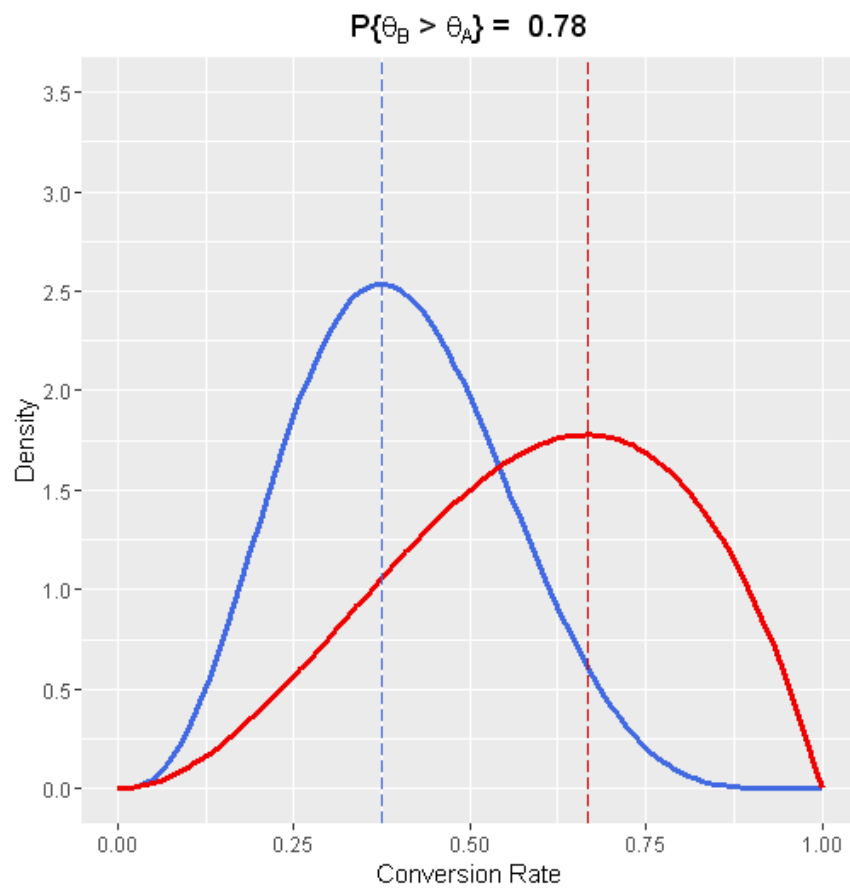


Рис. 1.6.3. Апостеріорні щільності розподілу коефіцієнтів конверсії θ_A і θ_B

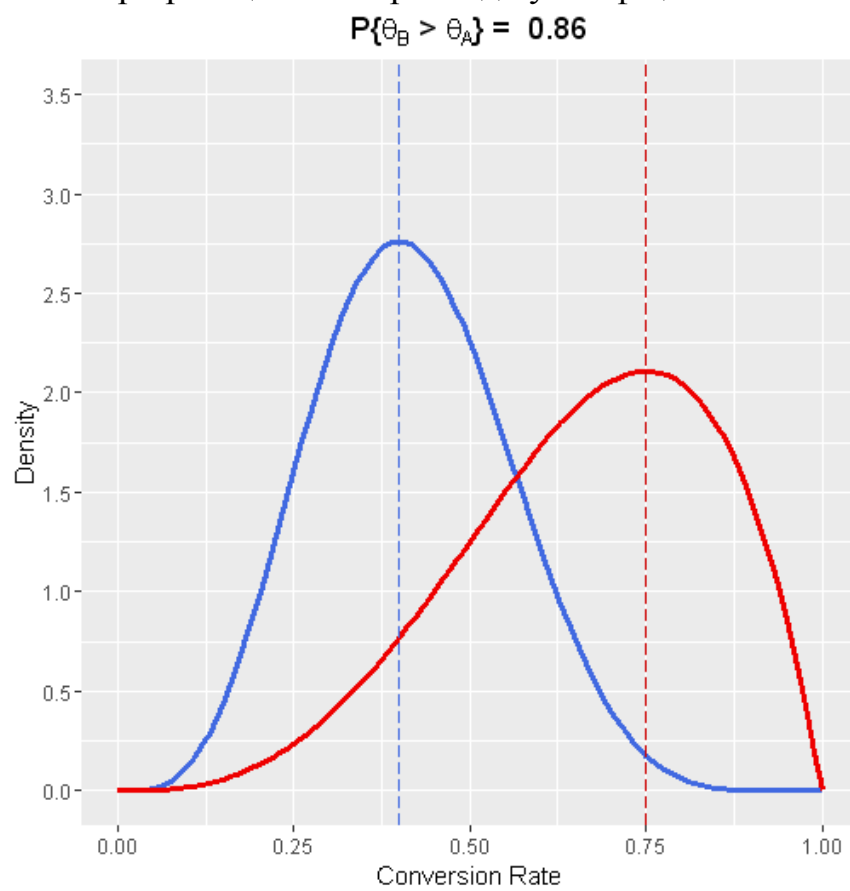


Рис. 1.6.4. Апостеріорні щільності розподілу коефіцієнтів конверсії θ_A і θ_B

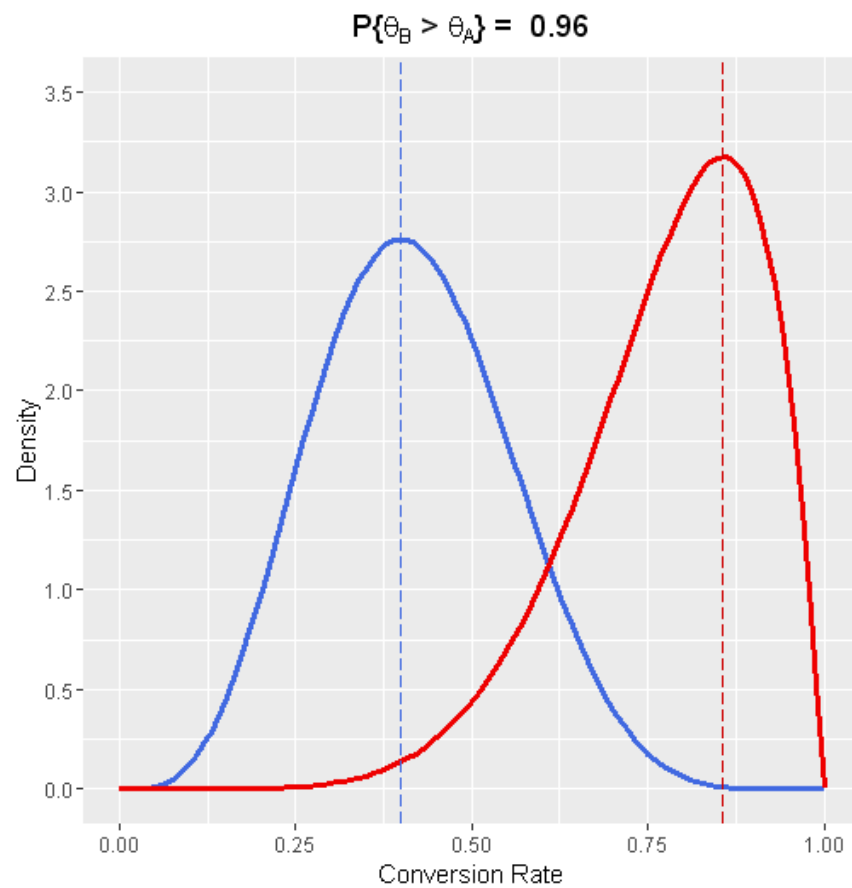


Рис. 1.6.5. Апостеріорні щільності розподілу коефіцієнтів конверсії θ_A і θ_B

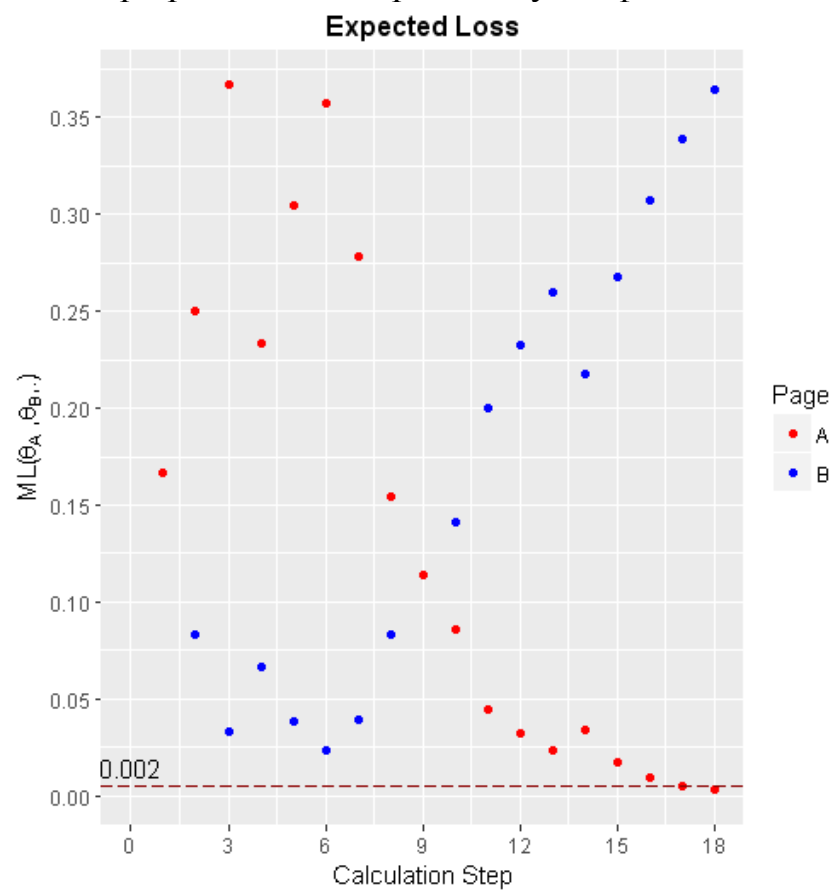


Рис. 1.6.6. Математичне сподівання функцій втрат на кожному кроці

Таблиця 1.6.1. Результати байєсівського А/В тестування

Параметри щільності бета-розподілу невідомої ймовірності успіху θ_A		Параметри щільності бета-розподілу невідомої ймовірності успіху θ_B		Точкова оцінка ймовірності успіху θ_A	Точкова оцінка ймовірності успіху θ_B
a	b	c	d	мода	мода
1	1	1	1	—	—
1	1	1	2	—	0
2	1	1	2	1	0
2	2	1	2	0,50	0
3	2	1	2	0,67	0
4	2	1	2	0,75	0
4	3	1	2	0,60	0
4	3	2	2	0,60	0,50
4	4	2	2	0,50	0,50
4	5	2	2	0,43	0,86
4	5	3	2	0,43	0,67
4	6	3	2	0,375	0,67
4	7	3	2	0,33	0,67
5	7	3	2	0,40	0,67
5	7	4	2	0,40	0,75
5	7	5	2	0,40	0,80
5	7	6	2	0,40	0,83
5	7	7	2	0,40	0,86

На рисунку 1.6.6 проілюстровано поведінку математичних сподівань функцій втрат $ML(\theta_A, \theta_B, A)$, $ML(\theta_A, \theta_B, B)$.

В А/В тестуванні взяли участь 10 відвідувачів групи А, 7 відвідувачів групи В. А/В тестування закінчилося за таких середніх значень функцій втрат:

$$ML(\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B, A) = 0,364 > \varepsilon = 0,002,$$

$$ML(\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B, B) = 0,001 \leq \varepsilon = 0,002,$$

отже, варіант сторінки, який пропонували для перегляду групі В, обирається для розміщення на сайті.

Імовірність того, що коефіцієнт конверсії в одній групі більший за коефіцієнти конверсії в двох інших групах дорівнює

$$P\{\hat{\theta}_A > \hat{\theta}_B\} = 0,04, \quad P\{\hat{\theta}_B > \hat{\theta}_A\} = 0,96.$$

Байєсівська точкова оцінка ймовірності успіху θ_B дорівнює $\hat{\theta}_B = 0,86$.

Байєсівський довірчий інтервал для ймовірності успіху θ_B має вигляд

$$P\{0,47 \leq \theta_B \leq 0,97\} = 0,95.$$

2. Байєсівське А/В/С тестування

2.1. Постановка задачі А/В/С тестування

Нехай в трьох групах відвідувачів (А, В та С) проводяться незалежні випробування Бернуллі з імовірностями успіху $\theta_A, \theta_B, \theta_C$ в кожній групі в одному випробуванні. Ймовірності успіху (коефіцієнти конверсії) $\theta_A, \theta_B, \theta_C$ невідомі випадкові величини.

Щільність $p(\theta_A)$ – апіорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_A , щільність $p(\theta_B)$ – апіорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_B , щільність $p(\theta_C)$ – апіорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_C , щільність $p(\theta_A|x_1, x_2, \dots, x_n)$ – апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_A за умови заданого вибіркового вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, щільність $p(\theta_B|y_1, y_2, \dots, y_n)$ – апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_B за умови заданого вибіркового вектора $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, щільність $p(\theta_C|z_1, z_2, \dots, z_n)$ – апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_C за умови заданого вибіркового вектора $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$.

Функція втрат $L(\theta_A, \theta_B, \theta_C, \cdot)$ характеризує втрати внаслідок неправильно прийнятого рішення щодо вибору варіанту сторінки для розміщення на сайті. Функція втрат дорівнює

$$L(\theta_A, \theta_B, \theta_C, A) = \max\{\theta_B - \theta_A, \theta_C - \theta_A, 0\}$$

при виборі варіанту сторінки, який пропонують для перегляду групі А,

$$L(\theta_A, \theta_B, \theta_C, B) = \max\{\theta_A - \theta_B, \theta_C - \theta_B, 0\}$$

при виборі варіанту сторінки, який пропонують для перегляду групі В,

$$L(\theta_A, \theta_B, \theta_C, C) = \max\{\theta_A - \theta_C, \theta_B - \theta_C, 0\}$$

при виборі варіанту сторінки, який пропонують для перегляду групі С.

Необхідно знайти точкові байєсівські оцінки $\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B, \hat{\theta}_C$ імовірностей успіху $\theta_A, \theta_B, \theta_C$ відносно функції втрат $L(\theta_A, \theta_B, \theta_C, \cdot)$.

Обчислити ймовірності $P\{\theta_A > \max\{\theta_B, \theta_C\}\}$, $P\{\theta_B > \max\{\theta_A, \theta_C\}\}$, $P\{\theta_C > \max\{\theta_A, \theta_B\}\}$.

2.2. Апостеріорна щільність розподілу ймовірностей

Обчислення апостеріорної щільності розподілу ймовірності успіху θ_A та апостеріорної щільності розподілу ймовірності успіху θ_B проведено в підрозділі 1.3.

Нехай в групі С проводяться незалежні випробування Бернуллі з двома наслідками: $\{z = 1\}$ – успіх, $\{z = 0\}$ – неуспіх. Число успіхів в одному випробуванні має розподіл Бернуллі з параметром θ_C :

$$P(z, \theta_C) = \theta_C^z (1 - \theta_C)^{1-z}, z = 0, 1; 0 < \theta_C < 1.$$

Функція максимальної правдоподібності задається рівністю

$$\begin{aligned} p(z_1, z_2, \dots, z_n | \theta_C) &= \theta_C^{z_1} (1 - \theta_C)^{1-z_1} \dots \theta_C^{z_n} (1 - \theta_C)^{1-z_n} = \\ &= \theta_C^{\sum_{i=1}^n z_i} (1 - \theta_C)^{n - \sum_{i=1}^n z_i}. \end{aligned}$$

Апріорна інформація щодо імовірності успіху θ_C задана щільністю бета-розподілу з параметрами (e, f) :

$$p(\theta_C) = \frac{\theta_C^{e-1} (1 - \theta_C)^{f-1}}{B(e, f)}, 0 \leq \theta_C \leq 1.$$

Згідно з теоремою Байєса апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_C дорівнює

$$\begin{aligned} p(\theta_C | z_1, z_2, \dots, z_n) &= \frac{p(\theta_C) p(z_1, z_2, \dots, z_n | \theta_C)}{\int_0^1 p(\theta_C) p(z_1, z_2, \dots, z_n | \theta_C) d\theta_C}, \\ p(\theta_C | z_1, z_2, \dots, z_n) &= \frac{\theta_C^{e-1} (1 - \theta_C)^{f-1} \theta_C^{\sum_{i=1}^n z_i} (1 - \theta_C)^{n - \sum_{i=1}^n z_i}}{\int_0^1 \theta_C^{e-1} (1 - \theta_C)^{f-1} \theta_C^{\sum_{i=1}^n z_i} (1 - \theta_C)^{n - \sum_{i=1}^n z_i} d\theta_C}, \\ p(\theta_C | z_1, z_2, \dots, z_n) &= \frac{\theta_C^{e + \sum_{i=1}^n z_i - 1} (1 - \theta_C)^{f + n - \sum_{i=1}^n z_i - 1}}{B(e + \sum_{i=1}^n z_i, f + n - \sum_{i=1}^n z_i)}, \end{aligned}$$

отже, апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_C – щільність бета-розподілу з параметрами $(\tilde{e}, \tilde{f})$:

$$p(\theta_C | z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{\theta_C^{\tilde{e}-1} (1 - \theta_C)^{\tilde{f}-1}}{B(\tilde{e}, \tilde{f})},$$

де

$$\tilde{e} = e + \sum_{i=1}^n z_i, \quad \tilde{f} = f + n - \sum_{i=1}^n z_i.$$

2.3. Обчислення ймовірності $P\{\theta_C > \max\{\theta_A, \theta_B\}\}$

Спільна щільність розподілу ймовірностей успіхів в трьох групах А, В, С дорівнює добутку щільності розподілу ймовірності успіху в групі А, щільності розподілу ймовірності успіху в групі В та щільності розподілу ймовірності успіху в групі С:

$$p(\theta_A, \theta_B, \theta_C; a, b, c, d, e, f) = p(\theta_A; a, b)p(\theta_B; c, d)p(\theta_C; e, f).$$

Обчислимо ймовірність того, що ймовірність успіху в групі С більша за ймовірності успіху в групі А та групі В:

$$\begin{aligned} P\{\theta_C > \max\{\theta_A, \theta_B\}\} &= P\{\theta_C > \theta_A, \theta_C > \theta_B\} = \\ &= P\{\theta_C - \theta_A > 0, \theta_C - \theta_B > 0\} = \\ &= \iiint_{z-x>0, z-y>0} p(x, y, z) dx dy dz = \int_0^1 \int_0^z \int_0^z p(x)p(y)p(z) dx dy dz = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^z \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a, b)} dx \right) \left(\int_0^z \frac{y^{c-1}(1-y)^{d-1}}{B(c, d)} dy \right) p(z) dz. \end{aligned}$$

Розглянемо регуляризовані неповні бета-функції:

$$\begin{aligned} I_z(a, b) &= \int_0^z \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a, b)} dx, \\ I_z(c, d) &= \int_0^z \frac{y^{c-1}(1-y)^{d-1}}{B(c, d)} dy. \end{aligned}$$

Маємо:

$$\begin{aligned} P\{\theta_C > \max\{\theta_A, \theta_B\}\} &= \int_0^1 I_z(a, b) I_z(c, d) p(z) dz = \\ &= \int_0^1 \left(1 - \sum_{i=0}^{a-1} \frac{z^i (1-z)^b}{(b+i)B(1+i, b)} \right) \left(1 - \sum_{j=0}^{c-1} \frac{z^j (1-z)^d}{(d+j)B(1+j, d)} \right) p(z) dz = \\ &= 1 - \sum_{j=0}^{c-1} \int_0^1 \frac{z^j (1-z)^d}{(d+j)B(1+j, d)} \frac{z^{e-1} (1-z)^{f-1}}{B(e, f)} dz - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=0}^{a-1} \int_0^1 \frac{z^i (1-z)^b}{(b+i)B(1+i, b)} \frac{z^{e-1} (1-z)^{f-1}}{B(e, f)} dz + \\
& + \int_0^1 \sum_{i=0}^{a-1} \sum_{j=0}^{c-1} \frac{z^i (1-z)^b}{(b+i)B(1+i, b)} \frac{z^j (1-z)^d}{(d+j)B(1+j, d)} p(z) dz = \\
& = 1 - \sum_{j=0}^{c-1} \int_0^1 \frac{z^{e-1+j} (1-z)^{f-1+d}}{(d+j)B(1+j, d)B(e, f)} dz - \sum_{i=0}^{a-1} \int_0^1 \frac{z^{e-1+i} (1-z)^{f-1+b}}{(b+i)B(1+i, b)B(e, f)} dz + \\
& + \int_0^1 \sum_{i=0}^{a-1} \sum_{j=0}^{c-1} \frac{z^{i+j} (1-z)^{b+d}}{(b+i)(d+j)B(1+i, b)B(1+j, d)} \frac{z^{e-1} (1-z)^{f-1}}{B(e, f)} dz = \\
& = 1 - \sum_{j=0}^{c-1} \frac{B(e+j, f+d)}{(d+j)B(1+j, d)B(e, f)} \int_0^1 \frac{z^{e-1+j} (1-z)^{f-1+d}}{B(e+j, f+d)} dz - \\
& - \sum_{i=0}^{a-1} \frac{B(e+i, f+b)}{(b+i)B(1+i, b)B(e, f)} \int_0^1 \frac{z^{e-1+i} (1-z)^{f-1+b}}{B(e+i, f+b)} dz + \\
& + \sum_{i=0}^{a-1} \sum_{j=0}^{c-1} \frac{B(i+j+e, b+d+f)}{(b+i)(d+j)B(1+i, b)B(1+j, d)B(e, f)} \int_0^1 \frac{z^{i+j+e-1} (1-z)^{b+d+f-1}}{B(i+j+e, b+d+f)} dz.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
& P\{\theta_C > \max\{\theta_A, \theta_B\}\} = \\
& = 1 - \sum_{j=0}^{c-1} \frac{B(e+j, f+d)}{(d+j)B(1+j, d)B(e, f)} - \sum_{i=0}^{a-1} \frac{B(e+i, f+b)}{(b+i)B(1+i, b)B(e, f)} + \\
& + \sum_{i=0}^{a-1} \sum_{j=0}^{c-1} \frac{B(i+j+e, b+d+f)}{(b+i)(d+j)B(1+i, b)B(1+j, d)B(e, f)}.
\end{aligned}$$

Ймовірність того, що ймовірність успіху в групі С більша за ймовірності успіху в групі А та групі В дорівнює

$$\begin{aligned}
& P\{\theta_C > \max\{\theta_A, \theta_B\}\} = 1 - P\{\theta_B > \theta_C\} - P\{\theta_A > \theta_C\} + \\
& + \sum_{i=0}^{a-1} \sum_{j=0}^{c-1} \frac{B(i+j+e, b+d+f)}{(b+i)(d+j)B(1+i, b)B(1+j, d)B(e, f)}.
\end{aligned}$$

2.4. Математичне сподівання функції втрат $L(\theta_A, \theta_B, \theta_C, \cdot)$

Математичне сподівання (середнє значення) функції втрат дорівнює

$$ML(\theta_A, \theta_B, \theta_C, A) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 L(x, y, z, A) p(x, y, z) dx dy dz$$

при виборі варіанту сторінки, який пропонують для перегляду групі А,

$$ML(\theta_A, \theta_B, \theta_C, B) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 L(x, y, z, B) p(x, y, z) dx dy dz$$

при виборі варіанту сторінки, який пропонують для перегляду групі В,

$$ML(\theta_A, \theta_B, \theta_C, C) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 L(x, y, z, C) p(x, y, z) dx dy dz$$

при виборі варіанту сторінки, який пропонують для перегляду групі С.

Обчислимо математичне сподівання функції втрат при виборі варіанту сторінки, який пропонують для перегляду групі А:

$$\begin{aligned} ML(\theta_A, \theta_B, \theta_C, A) &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 L(x, y, z, A) p(x, y, z) dx dy dz = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \max\{y - x, z - x, 0\} p(x, y, z) dx dy dz = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \max\{y - x, z - x, 0\} p(x) p(y) p(z) dx dy dz = \\ &= \int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_0^y (y - x) \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a, b)} \frac{y^{c-1}(1-y)^{d-1}}{B(c, d)} \frac{z^{e-1}(1-z)^{f-1}}{B(e, f)} dz + \\ &+ \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_x^1 (z - x) \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a, b)} \frac{y^{c-1}(1-y)^{d-1}}{B(c, d)} \frac{z^{e-1}(1-z)^{f-1}}{B(e, f)} dz + \\ &+ \int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_y^1 (z - x) \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a, b)} \frac{y^{c-1}(1-y)^{d-1}}{B(c, d)} \frac{z^{e-1}(1-z)^{f-1}}{B(e, f)} dz. \end{aligned}$$

Здобуваємо

$$\begin{aligned}
& ML(\theta_A, \theta_B, \theta_C, A) = \\
& = \frac{B(c+1, d)}{B(c, d)} (1 - h(a, b, c+1, d)) - \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} (1 - h(a+1, b, c, d)) - \\
& - \frac{B(c+1, d)}{B(c, d)} \sum_{i=0}^{e-1} \frac{B(c+1+i, d+f)}{(f+i)B(1+i, f)B(c+1, d)} (1 - h(a, b, c+i+1, d+f)) + \\
& + \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} \sum_{i=0}^{e-1} \frac{B(c+i, d+f)}{(f+i)B(1+i, f)B(c, d)} (1 - h(a+1, b, c+i, d+f)) + \\
& + \frac{B(e+1, f)}{B(e, f)} (1 - h(a, b, e+1, f)) - \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} (1 - h(a+1, b, e, f)) - \\
& - \frac{B(e+1, f)}{B(e, f)} \sum_{i=0}^e \frac{B(a+i, b+f)}{(i+f)B(1+i, f)B(a, b)} (1 - h(a+i, b+f, c, d)) + \\
& + \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} \sum_{i=0}^{e-1} \frac{B(a+1+i, b+f)}{(i+f)B(1+i, f)B(a+1, b)} (1 - h(a+1+i, b+f, c, d)) + \\
& + \frac{B(e+1, f)}{B(e, f)} \sum_{i=0}^e \frac{B(c+i, d+f)}{(i+f)B(1+i, f)B(c, d)} (1 - h(a, b, c+i, d+f)) - \\
& - \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} \sum_{i=0}^{e-1} \frac{B(c+i, d+f)}{(i+f)B(1+i, f)B(c, d)} (1 - h(a+1, b, c+i, d+f)).
\end{aligned}$$

Обчислимо математичне сподівання функції втрат при виборі варіанту сторінки, який пропонують для перегляду групі В:

$$\begin{aligned}
ML(\theta_A, \theta_B, \theta_C, B) &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 L(\theta_A, \theta_B, \theta_C, B) p(x, y, z) dx dy dz = \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \max\{x - y, z - y, 0\} p(x, y, z) dx dy dz = \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \max\{x - y, z - y, 0\} p(x) p(y) p(z) dx dy dz =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^x (x-y) \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)} \frac{y^{c-1}(1-y)^{d-1}}{B(c,d)} \frac{z^{e-1}(1-z)^{f-1}}{B(e,f)} dz + \\
& + \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_x^1 (z-y) \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)} \frac{y^{c-1}(1-y)^{d-1}}{B(c,d)} \frac{z^{e-1}(1-z)^{f-1}}{B(e,f)} dz + \\
& + \int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_y^1 (z-y) \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)} \frac{y^{c-1}(1-y)^{d-1}}{B(c,d)} \frac{z^{e-1}(1-z)^{f-1}}{B(e,f)} dz.
\end{aligned}$$

Здобуваємо

$$\begin{aligned}
& ML(\theta_A, \theta_B, \theta_C, B) = \\
& = \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} h(a+1, b, c, d) - \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} (1 - h(a+1, b, e, f)) + \\
& + \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} \sum_{i=0}^{e-1} \frac{B(a+i+1, b+f)}{(i+f)B(i+1, f)B(a+1, b)} (1 - h(a+i+1, b+f, c, d)) - \\
& - \frac{B(c+1, d)}{B(c, d)} h(a, b, c+1, d) + \frac{B(c+1, d)}{B(c, d)} (1 - h(a, b, e, f) - \\
& - \frac{B(c+1, d)}{B(c, d)} \sum_{i=0}^{e-1} \frac{B(a+i, b+f)}{(i+f)B(i+1, f)B(a, b)} (1 - h(a+i, b+f, c+1, d)) + \\
& + \frac{B(e+1, f)}{B(e, f)} (1 - h(a, b, e+1, f) - \frac{B(c+1, d)}{B(c, d)} (1 - h(a, b, e, f)) - \\
& - \frac{B(e+1, f)}{B(e, f)} \sum_{i=0}^e \frac{B(a+i, b+f)}{(i+f)B(i+1, f)B(a, b)} (1 - h(a+i, b+f, c, d)) + \\
& + \frac{B(c+1, d)}{B(c, d)} \sum_{i=0}^{e-1} \frac{B(a+i, b+f)}{(i+f)B(i+1, f)B(a, b)} (1 - h(a+i, b+f, c+1, d)) + \\
& + \frac{B(e+1, f)}{B(e, f)} \sum_{i=0}^e \frac{B(c+i, d+f)}{B(c, d)(i+f)B(i+1, f)} (1 - h(a, b, c+i, d+f)) - \\
& - \frac{B(c+1, d)}{B(c, d)} \sum_{i=0}^{e-1} \frac{B(c+i+1, d+f)}{B(c+1, d)(i+f)B(i+1, f)} (1 - h(a, b, c+i+1, d+f))
\end{aligned}$$

Обчислимо математичне сподівання функції втрат при виборі варіанту сторінки, який пропонують для перегляду групі С:

$$\begin{aligned}
ML(\theta_A, \theta_B, \theta_C, C) &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 L(\theta_A, \theta_B, \theta_C, C) p(x, y, z) dx dy dz = \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \max\{x - z, y - z, 0\} p(x, y, z) dx dy dz = \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \max\{x - z, y - z, 0\} p(x) p(y) p(z) dx dy dz = \\
&\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^x (x - z) \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a, b)} \frac{y^{c-1}(1-y)^{d-1}}{B(c, d)} \frac{z^{e-1}(1-z)^{f-1}}{B(e, f)} dz + \\
&\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_0^y (y - z) \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a, b)} \frac{y^{c-1}(1-y)^{d-1}}{B(c, d)} \frac{z^{e-1}(1-z)^{f-1}}{B(e, f)} dz. \\
ML(\theta_A, \theta_B, \theta_C, C) &= \\
&= \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} h(a+1, b, c, d) - \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} (1 - h(a+1, b, e, f)) + \\
&+ \frac{B(a+1, b)}{B(a, b)} \sum_{i=0}^{e-1} \frac{B(a+i+1, b+f)}{(i+f)B(i+1, f)B(a+1, b)} (1 - h(a+i+1, b+f, c, d)) - \\
&\quad - \frac{B(e+1, f)}{B(e, f)} + \frac{B(e+1, f)}{B(e, f)} (1 - h(a, b, c, d)) + \\
&+ \frac{B(e+1, f)}{B(e, f)} (1 - h(a, b, e+1, f)) - \frac{B(e+1, f)}{B(e, f)} (1 - h(a, b, c, d)) - \\
&- \frac{B(e+1, f)}{B(e, f)} \sum_{i=0}^e \frac{B(a+i, b+f)}{(i+f)B(i+1, f)B(a, b)} (1 - h(a+i, b+f, c, d)) + \\
&\quad + \frac{B(c+1, d)}{B(c, d)} (1 - h(a, b, c+1, d)) - \\
&- \frac{B(c+1, d)}{B(c, d)} \sum_{i=0}^{e-1} \frac{B(c+i+1, d+f)}{(f+i)B(1+i, f)B(c, d)} (1 - h(a, b, c+i+1, d+f)) - \\
&+ \frac{B(e+1, f)}{B(e, f)} \sum_{i=0}^e \sum_{j=0}^{c+i-1} \frac{B(c+i, d+f)B(a+j, d+f+b)}{B(a, b)(i+f)B(i+1, f)B(c, d)(j+d+f)B(j+1, d+f)}.
\end{aligned}$$

2.5. Реалізація байєсівського А/В/С тестування

При А/В/С тестуванні першій групі відвідувачів пропонують до перегляду сторінку А, другій групі відвідувачів пропонують до перегляду сторінку В, третій групі відвідувачів пропонують до перегляду сторінку С.

Для збереження чистоти експерименту необхідно ідентифікувати відвідувачів під час тестування та при повторних відвідуваннях сайту пропонувати їм до перегляду ту саму сторінку А, або В, або С, яку вони бачили попереднього разу.

Моделюється потік відвідувачів. Кожен відвідувач з імовірністю $1/3$ може потрапити до першої групи, з імовірністю $1/3$ може потрапити до другої групи, з імовірністю $1/3$ може потрапити до третьої групи. Після того, як відвідувач опинився в одній із трьох груп, моделюється його поведінка. Поведінка відвідувача однозначно визначається двома подіями: успіх – відвідувач виконав цільову дію, неуспіх – відвідувач не виконав цільову дію. Якщо відвідувач опинився в першій групі, то подія успіх відбувається з імовірністю θ_A . Якщо відвідувач опинився в другій групі, то подія успіх відбувається з імовірністю θ_B . Якщо відвідувач опинився в третій групі, то подія успіх відбувається з імовірністю θ_C .

Апріорна інформація про розподіл невідомої ймовірності успіху θ_A подана щільністю бета-розподілу з параметрами (a, b) , апріорна інформація про розподіл невідомої ймовірності успіху θ_B подана щільністю бета-розподілу з параметрами (c, d) , апріорна інформація про розподіл невідомої ймовірності успіху θ_C подана щільністю бета-розподілу з параметрами (e, f) .

Згідно з теоремою Байєса апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_A є щільністю бета-розподілу з параметрами:

$$\tilde{a} = a + x_i, \quad \tilde{b} = b + (1 - x_i),$$

де x_i – число успіхів в одному випробуванні ($x_i = 0$ або 1),

апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_B є щільністю бета-розподілу з параметрами:

$$\tilde{c} = c + y_i, \quad \tilde{d} = d + (1 - y_i),$$

де y_i – число успіхів в одному випробуванні ($y_i = 0$ або 1),

апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_C є щільністю бета-розподілу з параметрами:

$$\tilde{e} = e + z_i, \quad \tilde{f} = f + (1 - z_i),$$

де z_i – число успіхів в одному випробуванні ($z_i = 0$ або 1).

Імовірність того, що ймовірність успіху в групі А більша за ймовірності успіху в групі В та групі С дорівнює

$$P\{\theta_A > \max\{\theta_B, \theta_C\}\} = 1 - P\{\theta_B > \theta_A\} - P\{\theta_C > \theta_A\} + \\ + \sum_{i=0}^{c-1} \sum_{j=0}^{e-1} \frac{B(i+j+a, b+d+f)}{(d+i)(f+j)B(1+i, d)B(1+j, f)B(a, b)}.$$

Імовірність того, що ймовірність успіху в групі В більша за ймовірності успіху в групі А та групі С дорівнює

$$P\{\theta_B > \max\{\theta_A, \theta_C\}\} = 1 - P\{\theta_A > \theta_B\} - P\{\theta_C > \theta_B\} + \\ + \sum_{i=0}^{a-1} \sum_{j=0}^{e-1} \frac{B(i+j+c, b+d+f)}{(b+i)(f+j)B(1+i, b)B(1+j, f)B(c, d)}.$$

Імовірність того, що ймовірність успіху в групі С більша за ймовірності успіху в групі А та групі В дорівнює

$$P\{\theta_C > \max\{\theta_A, \theta_B\}\} = 1 - P\{\theta_A > \theta_C\} - P\{\theta_B > \theta_C\} + \\ + \sum_{i=0}^{a-1} \sum_{j=0}^{c-1} \frac{B(i+j+e, b+d+f)}{(b+i)(d+j)B(1+i, b)B(1+j, d)B(e, f)}.$$

Математичні сподівання функцій втрат порівнюються із рівнем допустимих втрат ε після кожного відвідування сторінки А або В або С. Якщо

$$ML(\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B, \hat{\theta}_C, A) \leq \varepsilon, ML(\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B, \hat{\theta}_C, B) > \varepsilon, ML(\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B, \hat{\theta}_C, C) > \varepsilon,$$

тестування зупиняється, варіант сторінки, який пропонують для перегляду групі А, обирається для розміщення на сайті.

Якщо

$$ML(\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B, \hat{\theta}_C, A) > \varepsilon, ML(\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B, \hat{\theta}_C, B) \leq \varepsilon, ML(\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B, \hat{\theta}_C, C) > \varepsilon,$$

тестування зупиняється, варіант сторінки, який пропонують для перегляду групі В, обирається для розміщення на сайті.

Якщо

$$ML(\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B, \hat{\theta}_C, A) > \varepsilon, ML(\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B, \hat{\theta}_C, B) > \varepsilon, ML(\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B, \hat{\theta}_C, C) \leq \varepsilon,$$

тестування зупиняється, варіант сторінки, який пропонують для перегляду групі С, обирається для розміщення на сайті.

На рисунках 2.5.1–2.5.5 зображено процес реалізації тестування.

На рисунку 2.5.1 наведені апріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_A (щільність бета-розподілу з параметрами (1,1) зображена блакитним кольором), апріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_B (щільність бета-розподілу з параметрами (1,1) зображена червоним кольором), апріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_C (щільність бета-розподілу з параметрами (1,1) зображена зеленим кольором). Імовірність того, що ймовірність успіху в одній групі більша за ймовірності успіху в двох інших групах дорівнює

$$P\{\theta_A > \max\{\theta_B, \theta_C\}\} = 0,33,$$

$$P\{\theta_B > \max\{\theta_A, \theta_C\}\} = 0,33,$$

$$P\{\theta_C > \max\{\theta_A, \theta_B\}\} = 0,33.$$

На рисунку 2.5.2 наведені апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_A (щільність бета-розподілу з параметрами $a = 7, b = 3$ зображена блакитним кольором), апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_B (щільність бета-розподілу з параметрами $c = 6, d = 2$ зображена червоним кольором), апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_C (щільність бета-розподілу з параметрами $e = 3, f = 5$ зображена зеленим кольором). Імовірність того, що ймовірність успіху в одній групі більша за ймовірності успіху в двох інших групах дорівнює

$$P\{\theta_A > \max\{\theta_B, \theta_C\}\} = 0,39, \quad P\{\theta_B > \max\{\theta_A, \theta_C\}\} = 0,6,$$

$$P\{\theta_C > \max\{\theta_A, \theta_B\}\} = 0,01.$$

На рисунку 2.5.3 наведені апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_A (щільність бета-розподілу з параметрами $a = 9, b = 5$ зображена блакитним кольором), апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_B (щільність бета-розподілу з параметрами $c = 7, d = 2$ зображена червоним кольором), апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_C (щільність бета-розподілу з параметрами $e = 3, f = 9$ зображена зеленим кольором). Імовірність того, що ймовірність успіху в одній групі більша за ймовірності успіху в двох інших групах дорівнює

$$P\{\theta_A > \max\{\theta_B, \theta_C\}\} = 0,22, \quad P\{\theta_B > \max\{\theta_A, \theta_C\}\} = 0,778, \\ P\{\theta_C > \max\{\theta_A, \theta_B\}\} = 0,002.$$

На рисунку 2.5.4 наведені апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_A (щільність бета-розподілу з параметрами $a = 13, b = 6$ зображена блакитним кольором), апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_B (щільність бета-розподілу з параметрами $c = 10, d = 2$ зображена червоним кольором), апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_C (щільність бета-розподілу з параметрами $e = 3, f = 10$ зображена зеленим кольором). Імовірність того, що ймовірність успіху в одній групі більша за ймовірності успіху в двох інших групах дорівнює

$$P\{\theta_A > \max\{\theta_B, \theta_C\}\} = 0,151, \quad P\{\theta_B > \max\{\theta_A, \theta_C\}\} = 0,848, \\ P\{\theta_C > \max\{\theta_A, \theta_B\}\} = 0,001.$$

На рисунку 2.5.5 наведені апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_A (щільність бета-розподілу з параметрами $a = 16, b = 9$ зображена блакитним кольором), апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_B (щільність бета-розподілу з параметрами $c = 14, d = 2$ зображена червоним кольором), апостеріорна щільність розподілу ймовірності успіху θ_C (щільність бета-розподілу з параметрами $e = 7, f = 17$ зображена зеленим кольором). Імовірність того, що ймовірність успіху в одній групі більша за ймовірності успіху в двох інших групах дорівнює

$$P\{\hat{\theta}_A > \max\{\hat{\theta}_B, \hat{\theta}_C\}\} = 0,03, \quad P\{\hat{\theta}_B > \max\{\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_C\}\} = 0,97, \\ P\{\hat{\theta}_C > \max\{\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B\}\} = 9,65 \cdot 10^{-6}.$$

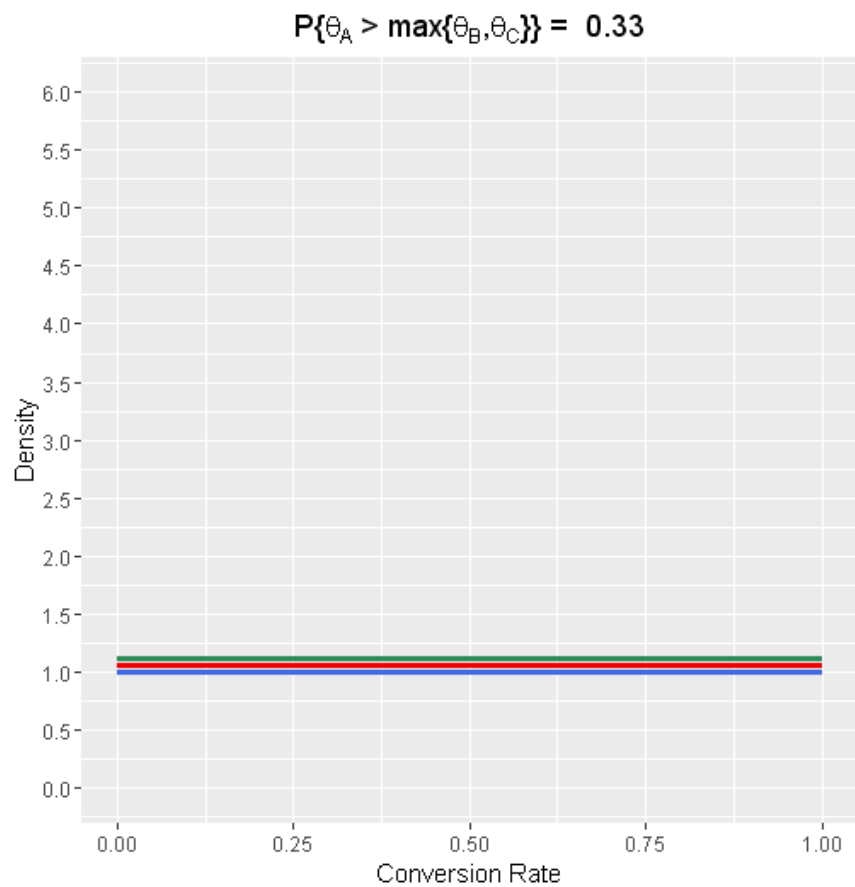


Рис. 2.5.1. Априорні щільності розподілу коефіцієнтів конверсії θ_A , θ_B , θ_C

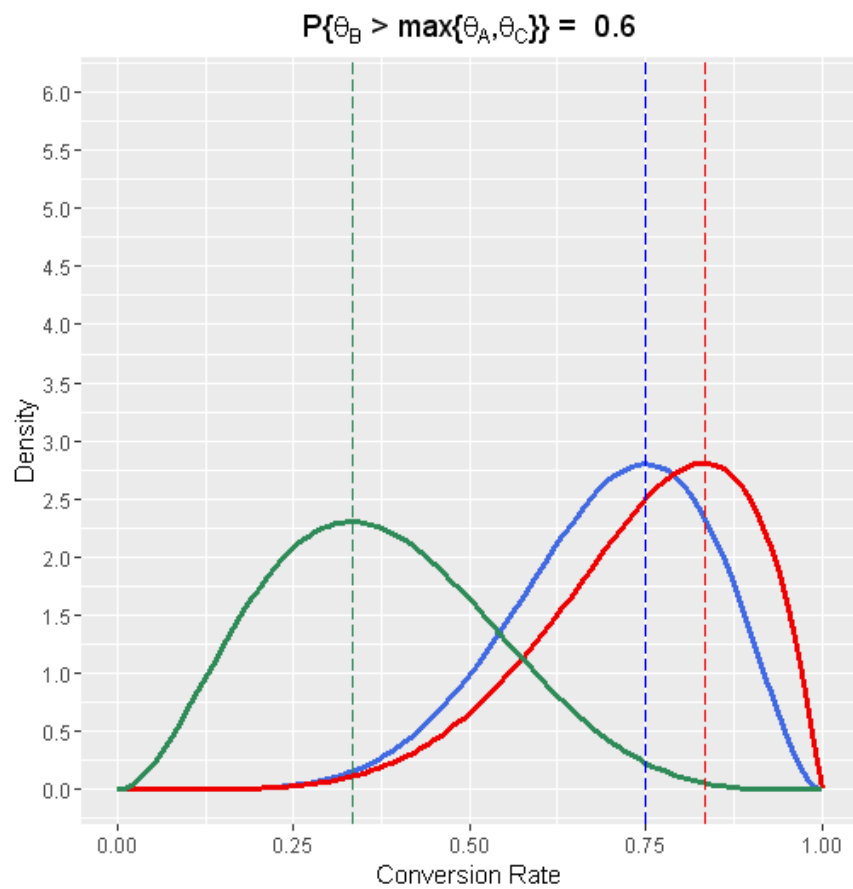


Рис. 2.5.2. Апостеріорні щільності розподілу коефіцієнтів конверсії θ_A , θ_B , θ_C

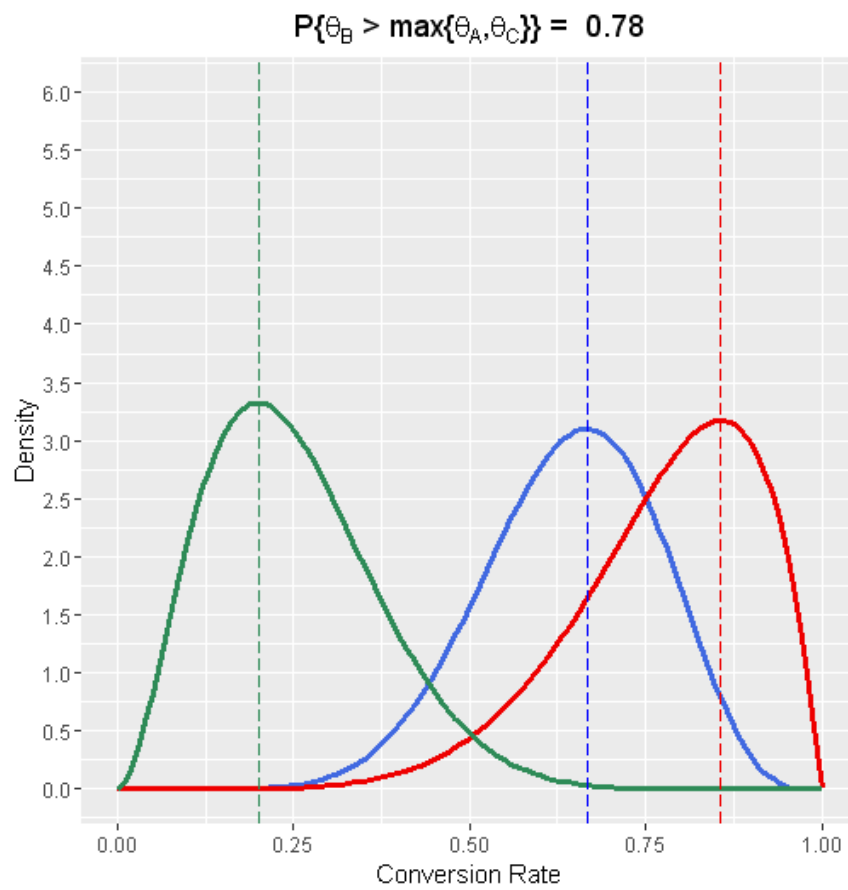


Рис. 2.5.3. Апостеріорні щільності розподілу коефіцієнтів конверсії θ_A , θ_B , θ_C

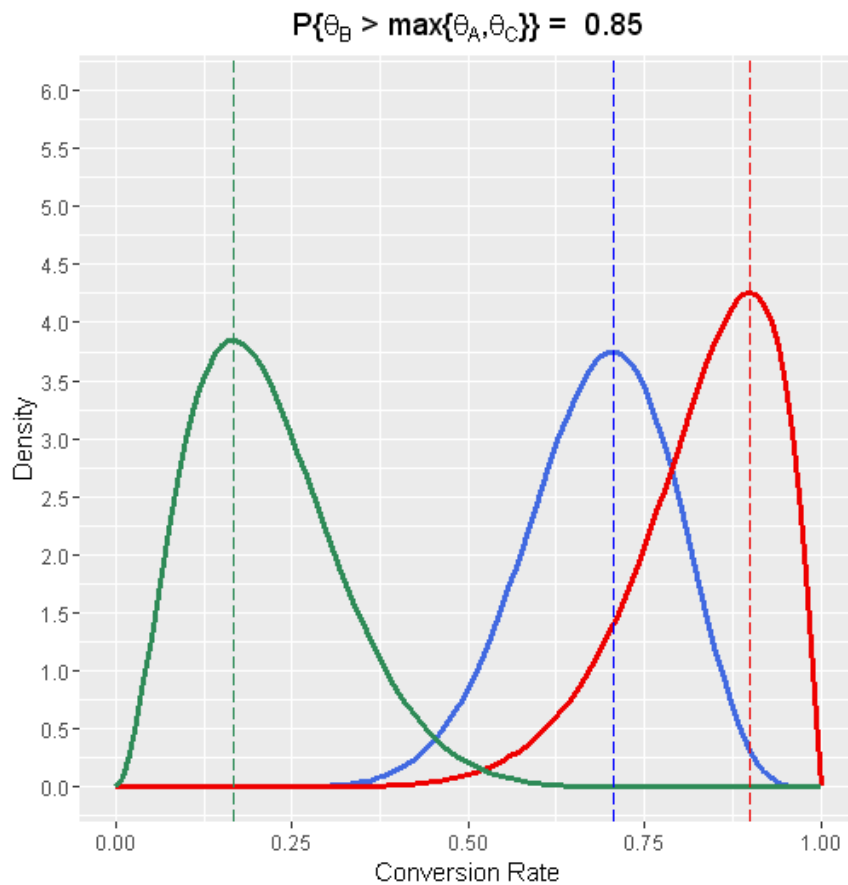


Рис. 2.5.4. Апостеріорні щільності розподілу коефіцієнтів конверсії θ_A , θ_B , θ_C

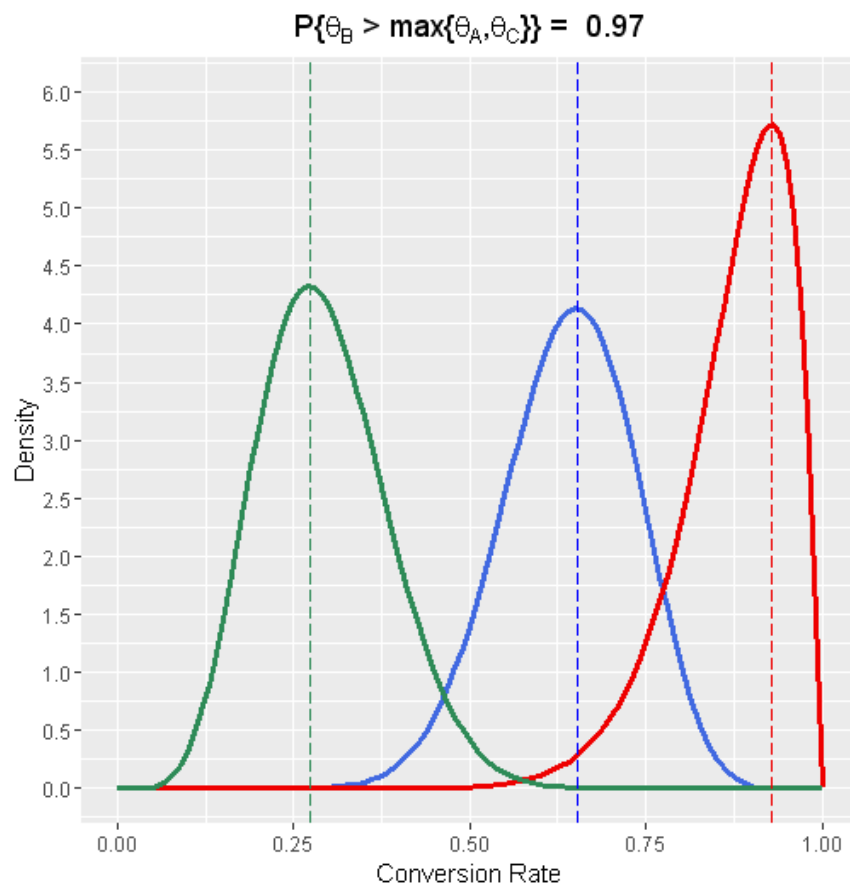


Рис. 2.5.5. Апостеріорні щільності розподілу коефіцієнтів конверсії θ_A , θ_B , θ_C

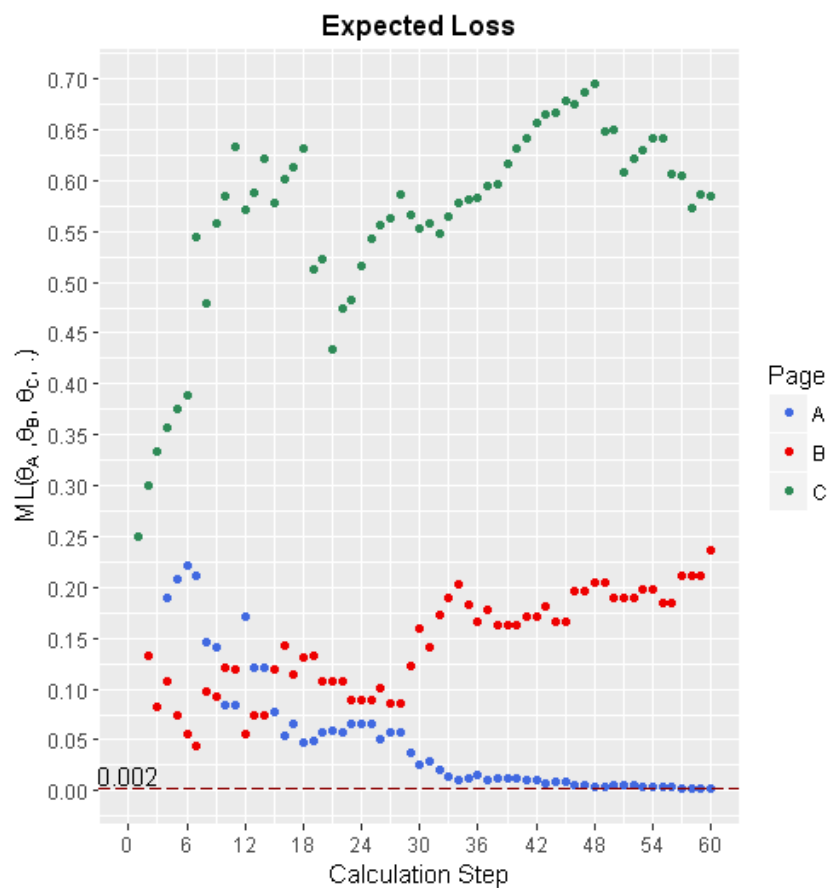


Рис. 2.5.6. Математичні сподівання функцій втрат на кожному кроці

Таблиця 2.5.1. Результати байєсівського А/В/С тестування

Параметри щільності бета-розподілу невідомої ймовірності успіху θ_A		Параметри щільності бета-розподілу невідомої ймовірності успіху θ_B		Параметри щільності бета-розподілу невідомої ймовірності успіху θ_C		Точкова оцінка ймовірності успіху θ_A	Точкова оцінка ймовірності успіху θ_B	Точкова оцінка ймовірності успіху θ_C
a	b	c	d	e	f	мода	мода	мода
1	1	1	1	1	1	—	—	—
2	1	1	1	1	1	1	—	—
3	1	1	1	1	1	1	—	—
3	1	2	1	1	1	1	1	—
4	1	2	1	1	1	1	1	—
5	1	2	1	1	1	1	1	—
5	1	2	1	1	2	1	1	0
5	2	2	1	1	2	0,8	1	0
5	2	2	1	1	3	0,8	1	0
5	2	3	1	1	3	0,8	1	0
5	2	3	1	1	4	0,8	1	0
5	2	3	2	1	4	0,8	0,67	0
5	2	4	2	1	4	0,8	0,75	0
5	2	4	2	1	5	0,8	0,75	0
5	3	4	2	1	5	0,67	0,75	0
5	3	5	2	1	5	0,67	0,8	0
6	3	5	2	1	5	0,71	0,8	0
6	3	6	2	1	5	0,71	0,83	0
6	3	6	2	2	5	0,71	0,83	0,2
7	3	6	2	2	5	0,75	0,83	0,2
7	3	6	2	3	5	0,75	0,83	0,33
7	3	6	2	3	6	0,75	0,83	0,28
8	3	6	2	3	6	0,77	0,83	0,28
8	3	6	2	3	7	0,77	0,83	0,25
8	3	6	2	3	8	0,77	0,83	0,22
8	3	7	2	3	8	0,77	0,85	0,22
9	3	7	2	3	8	0,8	0,85	0,22
9	3	7	2	3	9	0,8	0,85	0,2
9	4	7	2	3	9	0,72	0,85	0,2
9	5	7	2	3	9	0,67	0,85	0,2
10	5	7	2	3	9	0,69	0,85	0,2
10	6	7	2	3	9	0,64	0,85	0,2
10	6	8	2	3	9	0,64	0,87	0,2
10	6	9	2	3	9	0,64	0,88	0,2
11	6	9	2	3	9	0,67	0,88	0,2
12	6	9	2	3	9	0,68	0,88	0,2
12	6	10	2	3	9	0,68	0,9	0,2
13	6	10	2	3	9	0,7	0,9	0,2
13	6	10	2	3	10	0,7	0,9	0,18
13	6	10	2	3	11	0,7	0,9	0,16
13	6	11	2	3	11	0,7	0,91	0,16
13	6	11	2	3	12	0,7	0,91	0,15
13	6	12	2	3	12	0,7	0,92	0,15
14	6	12	2	3	12	0,72	0,92	0,15
14	6	12	2	3	13	0,72	0,92	0,14
14	7	12	2	3	13	0,68	0,92	0,14

Таблиця 2.5.1. Результати байєсівського А/В/С тестування (продовження)

Параметри щільності бета-розподілу невідомої ймовірності успіху θ_A		Параметри щільності бета-розподілу невідомої ймовірності успіху θ_B		Параметри щільності бета-розподілу невідомої ймовірності успіху θ_C		Точкова оцінка ймовірності успіху θ_A	Точкова оцінка ймовірності успіху θ_B	Точкова оцінка ймовірності успіху θ_C
a	b	c	d	e	f	мода	мода	мода
14	7	12	2	3	14	0,68	0,92	0,13
14	7	13	2	3	14	0,68	0,92	0,13
14	7	13	2	4	14	0,68	0,92	0,19
15	7	13	2	4	14	0,7	0,92	0,19
15	7	13	2	5	14	0,7	0,92	0,23
15	7	13	2	5	15	0,7	0,92	0,22
15	7	14	2	5	15	0,7	0,93	0,22
15	7	14	2	5	16	0,7	0,93	0,21
16	7	14	2	5	16	0,71	0,93	0,21
16	7	14	2	6	16	0,68	0,93	0,25
16	8	14	2	6	16	0,68	0,93	0,25
16	8	14	2	7	17	0,68	0,93	0,28
16	8	14	2	7	17	0,68	0,93	0,27
16	9	14	2	7	17	0,65	0,93	0,27

В А/В/С тестуванні взяли участь 23 відвідувачі групи А, 14 відвідувачів групи В, 22 відвідувачі групи С. А/В/С тестування закінчилося за таких середніх значень функцій втрат:

$$ML(\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B, \hat{\theta}_C, A) = 0,237 > \varepsilon = 0,002,$$

$$ML(\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B, \hat{\theta}_C, B) = 0,002 \leq \varepsilon = 0,002,$$

$$ML(\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B, \hat{\theta}_C, C) = 0,585 > \varepsilon = 0,002,$$

отже, варіант сторінки, який пропонували для перегляду групі В, обирається для розміщення на сайті.

Імовірність того, що коефіцієнт конверсії в одній групі більший за коефіцієнти конверсії в двох інших групах дорівнює

$$P\{\hat{\theta}_A > \max\{\hat{\theta}_B, \hat{\theta}_C\}\} = 0,03,$$

$$P\{\hat{\theta}_B > \max\{\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_C\}\} = 0,97,$$

$$P\{\hat{\theta}_C > \max\{\hat{\theta}_A, \hat{\theta}_B\}\} = 9,65 \cdot 10^{-6}.$$

Байєсівська точкова оцінка ймовірності успіху θ_B дорівнює $\hat{\theta}_B = 0,93$.

Байєсівський довірчий інтервал для ймовірності успіху θ_B має вигляд

$$P\{0,68 \leq \theta_B \leq 0,98\} = 0,95.$$

Список рекомендованої літератури

1. C. Stucchio Bayesian A/B Testing at VWO, Whitepaper, Visual Website Optimizer, 2015.
2. E. Miller Formulas for A/B Testing [Електрон. ресурс] // URL: <https://www.evanmiller.org/bayesian-ab-testing.html>
3. Айвазян С.А. Байесовский подход в эконометрическом анализе // Прикладная Эконометрика. – 2008. – №1. – С. 93–130.
4. Де Гроот М. Оптимальные статистические решения. – М.: Мир, 1974.
5. Закс Ш. Теория статистических выводов. – М.: Мир, 1975. – 776 с.
6. Зельнер А. Байесовские методы в эконометрии. – М.: Статистика, 1980.
7. Савчук В.П. Байесовские методы статистического оценивания: Надежность технических объектов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 328 с.
8. Турчин В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник для студентов высших учебных заведений. – Днепр, Издательство «Лира». – 2018. – 752 с.
9. Хей Дж. Введение в методы байесовского статистического вывода. – М.: Финансы и статистика, 1987. – 335 с.
10. Rasmus Bååth Fundamentals of Bayesian Data Analysis in R: [Електрон. ресурс] // URL: <https://www.datacamp.com/courses/fundamentals-of-bayesian-data-analysis-in-r>

Зміст

Вступ	3
Розділ 1. Байєсівське A/B тестування	6
1.1. Термінологія електронної комерції	6
1.2. Постановка задачі A/B тестування	7
1.3. Апостеріорна щільність розподілу ймовірностей	8
1.4. Обчислення ймовірності $P\{\theta_B > \theta_A\}$	10
1.5. Математичне сподівання функції втрат $L(\theta_A, \theta_B, \cdot)$	11
1.6. Реалізація байєсівського A/B тестування	15
Розділ 2. Байєсівське A/B/C тестування	22
2.1. Постановка задачі A/B/C тестування	22
2.2. Апостеріорна щільність розподілу ймовірностей	23
2.3. Обчислення ймовірності $P\{\theta_C > \max\{\theta_A, \theta_B\}\}$	24
2.4. Математичне сподівання функції втрат $L(\theta_A, \theta_B, \theta_C, \cdot)$	26
2.5. Реалізація байєсівського A/B/C тестування	30
Список рекомендованої літератури	39