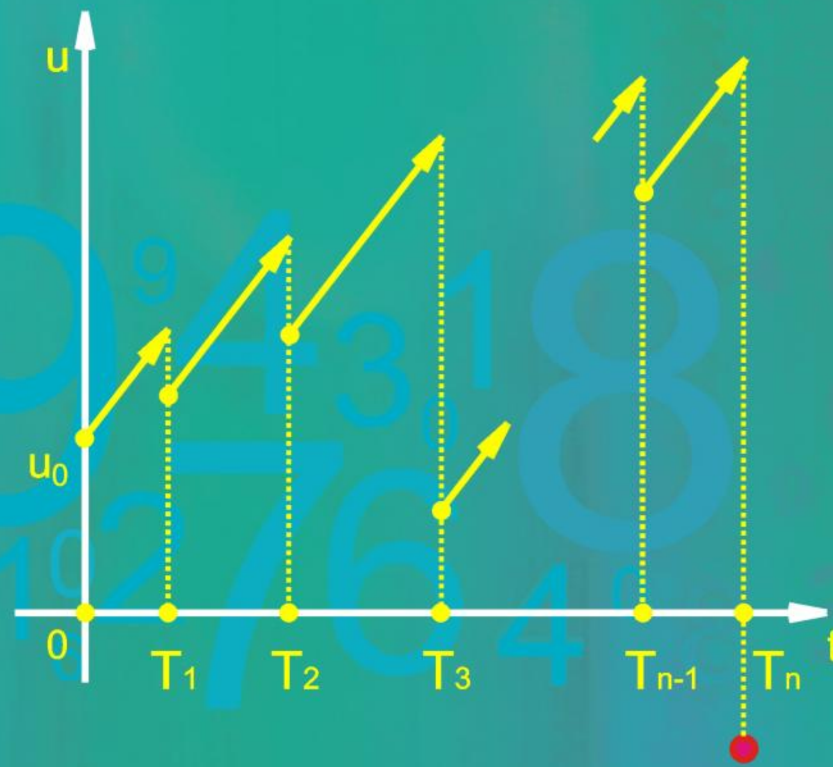
Я. С. Бондаренко, В. М. Турчин, Є. В. Турчин

ТЕОРІЯ РИЗИКУ В СТРАХУВАННІ

Основні поняття, приклади, задачі

Я. С. Бондаренко, В. М. Турчин, Є. В. Турчин



УДК 519.2 (075.8)
ББК 22.17я73
Б 81

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. Б.В. Бондарев
д-р фіз.-мат. наук, проф. О.В. Іванов
д-р фіз.-мат. наук, проф. Ю.В. Козаченко

Б 81 Бондаренко, Я. С. Теорія ризику в страхуванні. Основні поняття, приклади, задачі [Текст]: навч. посіб. / Я. С. Бондаренко, В. М. Турчин, Є. В. Турчин. — Д.: РВВ ДНУ, 2010. — 180 с.

Викладені основні поняття і факти теорії ризику в страхуванні: моделі індивідуальних позовів, методи точного та наближеного аналізу сумарного позову в моделях індивідуального та колективного ризиків. Досліджені моделі банкрутства.

Для студентів спеціальностей “Статистика”, “Математика”, “Фінансова та актуарна математика”, цим матеріалом можуть користуватись також працівники страхових компаній, пенсійних фондів, банків.

Гриф надано Міністерством освіти і науки України
Лист № 1/11–2424 від 25.03.2010

Вступ

Мета клієнта, який укладає договір страхування зі страховою компанією, — уникнути фінансових втрат, пов'язаних із випадковістю настання тих чи інших небажаних подій (страхових випадків): пожеж, повеней, транспортних пригод, смерті застрахованого та ін. До укладання договору страхування клієнт має певний ризик, який може призвести до випадкових втрат розміром X (а може й не призвести до них, у такому випадку $X = 0$). Уклавши договір страхування зі страховою компанією, клієнт за певну плату p купує страховий захист, тобто за плату p клієнт уникає можливих втрат, пов'язаних зі страховим випадком, які хоча й малоймовірні, але для клієнта можуть бути катастрофічно великими. Зазначимо, що при цьому ризик не зникає — його за плату p перебирає на себе страхова компанія. Тому фінансовий ризик і пов'язана з ним небезпека банкрутства — характерні особливості роботи кожної страхової компанії.

Забезпечення фінансової стійкості страхової компанії передбачає зусилля як її керівників, так і економістів, юристів, математиків. Математичні аспекти цієї задачі вивчають у теорії ризику. Вони дозволяють кількісно оцінювати фінансові ризики в діяльності страхової компанії.

Математичною основою теорії ризику є теорія ймовірностей та математична статистика.

Індивідуальні позови. Елементарною складовою частиною фінансового ризику страхової компанії є індивідуальний позов клієнта до страхової компанії, тобто сума, необхідна для відшкодування втрат, спричинених страховим випадком.

У теорії ризику ми будемо розглядати величину X індивідуального позову, який вимірюють у грошових одиницях.

Договір страхування може призвести як до одного позову (наприклад, договір страхування життя), так і до декількох (наприклад, у разі страхування автомобіля протягом терміну дії

договору автомобіль може кілька разів потрапити в дорожньо-транспортну пригоду).

Основні припущення щодо величини X індивідуального позову такі:

1) величина позову X є випадковою величиною;

2) випадкові величини, які описують індивідуальні позови, належать до певних класів випадкових величин (вони мають адекватно описувати величини позовів до страхової компанії).

Моделі процесу надходження позовів. Страхові випадки відбуваються у випадкові моменти часу. Випадковість моментів настання страхового випадку так само важливо враховувати, як і величину позову. Щодо моментів настання страхових випадків і величин позовів припускатимемо, що вони незалежні (у теоретико-ймовірнісному сенсі).

Надходження позовів, як правило, адекватно описується пуассонівським процесом. У пуассонівій моделі надходження позовів і інтервали між ними: $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \ldots$ — незалежні, однаково розподілені випадкові величини, кожна з яких має показниковий розподіл із параметром λ ($\lambda > 0$):

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Параметр λ називається інтенсивністю пуассонівського процесу.

Часто становить інтерес загальне число позовів $\nu(t)$ за деякий інтервал часу t. Імовірнісні характеристики $\nu(t)$ визначаються за ймовірнісними характеристиками моментів настання страхових випадків. Зокрема, якщо процес надходження позовів пуассонів з інтенсивністю λ, то величина $\nu(t)$ має пуассонівський розподіл з параметром λt.

Моделі банкрутства. Фінансовий стан страхової компанії, зокрема ймовірність банкрутства, визначається індивідуальними позовами й моментами їх надходження.

Якщо в деякий момент часу t до страхової компанії надійшов позов величиною X і при цьому в момент t капітал компанії дорівнює u_t, то при

$$u_t \geq X$$

компанія виконає свої зобов'язання перед клієнтом, а при

$$u_t < X$$

вона не зможе сплатити позов, і в цьому випадку матиме місце банкрутство компанії (хоча компанія може уникнути банкрутства, позичивши для виплати відсутню суму $X - u_t$).

Імовірність банкрутства становить основний інтерес для страхової компанії. У навчальному посібнику розглянута низка моделей для обчислення ймовірності банкрутства: модель індивідуального ризику, модель колективного ризику, динамічна модель банкрутства.

Модель індивідуального ризику. Найпростіша з моделей будується за таких припущень.

1) Розглядається фіксований, відносно короткий інтервал часу (як правило, один рік) так, щоб можна було знехтувати інфляцією та не враховувати прибуток від інвестування.

2) Плата за страховку повністю вноситься на початку періоду (жодних надходжень протягом цього періоду немає), а всі розрахунки відбуваються в кінці року.

3) Число договорів страхування N фіксоване (не випадкове).

4) Позови $X_i, i = 1, 2, \ldots N$ за договорами — незалежні випадкові величини (не обов'язково однаково розподілені).

У припущеннях 1–4 значення сумарного позову до страхової компанії за N договорами дорівнює

$$S_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N.$$

Якщо u — капітал компанії, то ймовірність банкрутства дорівнює

$$R = P\{S_N > u\}.$$

У цій моделі явно враховуються позови, пов'язані з кожним індивідуальним договором, тому вона називається *моделлю індивідуального ризику.*

Зазначимо, що модель індивідуального ризику не дає можливості оцінити

1) момент банкрутства;

2) величину капіталу $S_N - u$, якої бракує для виконання фінансових зобов'язань перед клієнтами (виплати за позовами).

Модель колективного ризику. У моделі колективного ризику виконуються припущення 1 і 2 моделі індивідуального ризику, але весь портфель договорів страхування розглядається як єдине ціле (один "великий" договір, який може породжувати низку позовів). При цьому позови, що надходять, не пов'язують із конкретними договорами — їх розглядають як позови портфеля договорів.

У моделі колективного ризику основною характеристикою портфеля договорів є не кількість N укладених договорів, а число ν позовів за період, що розглядається, при цьому кожен позов Y_i, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ ненульовий. Число позовів ν до страхової компанії є випадковою величиною, що, як правило, адекватно описується пуассоновим

$$P\{\nu = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots; \lambda > 0$$

або від'ємним біномним розподілом

$$P\{\nu = k\} = C_{k+r-1}^{r-1} p^r (1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

де r — фіксоване й відоме.

Інша відмінність моделі колективного ризику від моделі індивідуального ризику полягає в припущенні, що величини позовів $Y_1, Y_2, \ldots$ є однаково розподіленими випадковими величинами. Зазначимо, що випадкові величини Y_i описують тільки позови, які реально надійшли, а тому на відміну від позовів за договорами X_j у моделі індивідуального ризику (X_j — позов за j-м договором) строго додатні. Сумарний позов до страхової компанії за даний період дорівнює

$$S_\nu = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu$$

(число доданків ν — випадкова величина).

Імовірність банкрутства компанії дорівнює

$$R = P\{S_\nu > u\},$$

де u — капітал компанії на кінець періоду дії договору страхування.

Динамічна модель банкрутства. У динамічній моделі банкрутства на відміну від статичних моделей робота страхової компанії розгортається в часі.

Найпростіша динамічна модель описується процесом надходження премій і процесом страхових виплат. Премія — це вартість страхового захисту за певним страховим договором (страховий захист — компенсація витрат клієнта в разі настання страхового випадку). Премії надходять набагато частіше, ніж подаються позови. Величина премії набагато менша величини позову, тому надходження премій можна розглядати як детермінований процес, який задається одним параметром — швидкістю надходження премій (позначимо її через c). Якщо в деякий момент часу t компанія мала капітал u_t і до моменту $t+h$ позови не надходили, то капітал компанії в момент $t+h$ буде дорівнювати

$$u_{t+h} = u_t + ch$$

(як і раніше не враховуватимемо відсотки на капітал та інфляцію).

Позначимо моменти надходження позовів через $T_1, T_2, \ldots$, а величини відповідних позовів через $Y_1, Y_2, \ldots$, тоді зміни капіталу компанії з часом можна описати так. У момент $t = 0$ компанія має початковий капітал $u_0 = u$. До моменту T_1 подання першого позову капітал зростає до величини

$$u + cT_1.$$

У момент T_1 компанія сплачує позов Y_1 і її капітал у цей момент зменшується до величини

$$u + cT_1 - Y_1.$$

Від моменту T_1 надходження першого позову до моменту T_2 подання другого позову капітал збільшується на суму $c(T_2 - T_1)$ і досягає величини

$$(u + cT_1 - Y_1) + c(T_2 - T_1) = u + cT_2 - Y_1.$$

У момент T_2 компанія сплачує позов величиною Y_2 і капітал у цей момент зменшується до

$$u + cT_2 - Y_1 - Y_2 = u + cT_2 - (Y_1 + Y_2).$$

Від моменту T_2 надходження другого позову до моменту T_3 подання третього позову капітал збільшується на суму $c(T_3 - T_2)$ і досягає величини

$$u + cT_2 - (Y_1 + Y_2) + c(T_3 - T_2) = u + cT_3 - (Y_1 + Y_2).$$

У момент T_3 компанія сплачує позов величиною Y_3 і капітал у цей момент зменшується:

$$u + cT_3 - (Y_1 + Y_2) - Y_3 = u + cT_3 - (Y_1 + Y_2 + Y_3)$$

і т. д. У момент T_n після виплати n-го позову капітал компанії становить

$$u + cT_n - (Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n).$$

Отже, компанія не збанкрутує до моменту n, якщо

$$u + cT_j - (Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_j) \geq 0$$

для всіх $j = 1, 2, \ldots, n$.

У момент часу n відбувається банкрутство компанії, якщо

$$u + cT_1 - Y_1 \geq 0,$$

$$u + cT_2 - (Y_1 + Y_2) \geq 0,$$

$$\vdots$$

$$u + cT_{n-1} - (Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{n-1}) \geq 0,$$

$$u + cT_n - (Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{n-1} + Y_n) < 0.$$

Імовірність банкрутства в динамічній моделі дорівнює

$$R(u) = 1 - P\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty}\{u + cT_n - (Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n) \geq 0\}\right\}.$$

Розділ 1

Математичні моделі індивідуальних позовів

1.1. Дискретні моделі індивідуальних позовів

Як математичну модель індивідуального позову за даним договором розглядатимемо випадкову величину, позначатимемо її через X. Індивідуальний позов (випадкова величина) X з додатною ймовірністю набуває значення 0:

$$P\{X = 0\} = p_0 > 0,$$

інакше кажучи, розподіл P_X випадкової величини X має атом у точці 0.

Якщо випадкова величина X, що описує індивідуальний позов, набуває скінченного або зліченного числа значень, то X називатимемо *дискретною моделлю індивідуального позову.*

Дискретні випадкові величини та їх числові характеристики. *Розподілом* дискретної випадкової величини X зі значеннями в $\mathbb{R}^1$ називатимемо функцію

$$P_X : b_i \to P_X(b_i), \quad b_i \in B \subset \mathbb{R}^1,$$

означену на множині B різних можливих значень випадкової величини X, що ставить у відповідність кожному можливому

значенню $b_i \in B$ імовірність

$$P_X(b_i) = P\{X = b_i\},$$

з якою X набуває цього значення.

Розподіл дискретної випадкової величини X зі значеннями в $\mathbb{R}^1$ часто записують у вигляді таблиці, у верхньому рядку якої вказують різні можливі значення випадкової величини, а в нижньому — імовірності, з якими ці значення набуваються:

$$\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_n & \dots \\ p_0 & p_1 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix},$$

де $P\{X = b_i\} = p_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$

За розподілом випадкової величини X завжди можна визначити її числові характеристики: математичне сподівання MX, дисперсію DX, середнє квадратичне відхилення σ_X, момент MX^k порядку k (якщо вони існують).

Теорема 1.1.1. *Нехай X — випадкова величина зі значеннями в $\mathbb{R}^1$; $P_X : b_i \to P_X(b_i) = p_i, \quad b_i \in B \subset \mathbb{R}^1$ — її розподіл; f — функція на $\mathbb{R}^1$ зі значеннями в $\mathbb{R}^1$.*

Якщо ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} f(b_i)P_X(b_i)$ збігається [1] абсолютно, то

$$Mf(X) = \sum_{i=0}^{\infty} f(b_i)P_X(b_i),$$

зокрема, якщо ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i P_X(b_i)$ збігається абсолютно, то

$$MX = \sum_{i=0}^{\infty} b_i P_X(b_i).$$

Дисперсія випадкової величини X за її розподілом обчислюється так:

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} b_i^2 p_i - \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i p_i \right)^2.$$

[1] Термін “збігається” залежно від контексту вживається у сенсі російського “сходится” (англійською “to converge”) або “совпадает” (англійською “to coincide”).

Математичне сподівання суми випадкового числа випадкових величин обчислюється згідно з теоремою Вальда.

Теорема 1.1.2. (тотожність Вальда). *Нехай $X_1, X_2, \ldots$ — незалежні, однаково розподілені випадкові величини зі скінченними математичними сподіваннями $MX_i,\ i = 1, 2, \ldots; \nu$ — невід'ємна, цілочислова випадкова величина зі скінченним математичним сподіванням $M\nu$. Якщо ν не залежить від випадкових величин $X_1, X_2, \ldots$, то*

$$MS_\nu = M(X_1 + X_2 + \ldots + X_\nu) = MX_1 M\nu.$$

Доведення.

$$MS_\nu = M\left(S_\nu, \bigcup_{k=1}^{\infty}\{\nu = k\}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} M(S_\nu, \{\nu = k\}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} M(S_k, \{\nu = k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} MS_k I_{\{\nu=k\}},$$

де $M(S_\nu, A) = MS_\nu I_A$. Оскільки випадкові величини $X_1, X_2, \ldots$ і ν незалежні, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} MS_k I_{\{\nu=k\}} = \sum_{k=1}^{\infty} MS_k\, MI_{\{\nu=k\}} = \sum_{k=1}^{\infty} MS_k\, P\{\nu = k\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} kMX_1\, P\{\nu = k\} = MX_1 \sum_{k=1}^{\infty} kP\{\nu = k\} = MX_1 M\nu.$$

Теорема доведена.

1.2. Структуровані моделі індивідуальних позовів

Структурування позову в договорах: один договір — один позов. У теорії ризику зручно подавати (структурувати) випадкову величину X (індивідуальний позов) у спеціальному вигляді. Нехай X — величина індивідуального позову за договором страхування (позначимо її значення через

$b_i, i = 1, 2, \ldots, b_0 = 0$);

$$I = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad X > 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad X = 0, \end{cases}$$

— індикатор події — "відбувся страховий випадок".

Означимо випадкову величину Y як величину реально поданого позову, коли страховий випадок відбувся (щоразу, коли I набуває значення 1, страховий випадок відбувся). Далі випадкова величина I описує настання страхового випадку, а Y — величину реального позову. Цілком природньо, що випадкові величини I і Y незалежні.

Випадкові величини виходячи з цього означення задовольняють рівність

$$X = IY. \tag{1.2.1}$$

Теорема 1.2.1. *Якщо*

$$P\{X = b_i\} = p_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

— розподіл X, то розподілом Y є

$$P\{Y = b_i\} = \frac{p_i}{1 - p_0}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Доведення. Спочатку знайдемо розподіл I:

$$P\{I = 0\} = P\{X = 0\} = p_0,$$

$$P\{I = 1\} = 1 - P\{I = 0\} = 1 - p_0.$$

Далі для $i = 1, 2, \ldots$

$$p_i = P\{X = b_i\} = P\{IY = b_i\} = P\{I = 1, Y = b_i\} =$$

$$= P\{I = 1\}P\{Y = b_i\} = (1 - p_0)P\{Y = b_i\}.$$

Звідси

$$P\{Y = b_i\} = \frac{p_i}{1 - p_0}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Зазначимо, що

$$\sum_{i=1}^{\infty} P\{Y = b_i\} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{1 - p_0} = \frac{1}{1 - p_0} \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

З а у в а ж е н н я 1. З рівності

$$\sum_{i=1}^{\infty} P\{Y = b_i\} = 1$$

випливає, що Y з додатними ймовірностями набуває тільки значень $b_1, b_2, \ldots$

З а у в а ж е н н я 2. Розподіл Y збігається з умовним розподілом X за умови $\{X > 0\}$, тобто

$$P\{Y = b_i\} = P\{X = b_i | X > 0\}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Дійсно, оскільки

$$\{X = b_i\} \subset \{X > 0\},$$

то

$$P\{Y = b_i\} = \frac{p_i}{1 - p_0} = \frac{P\{X = b_i\}}{P\{X > 0\}} =$$

$$= \frac{P\{X = b_i, X > 0\}}{P\{X > 0\}} = P\{X = b_i | X > 0\}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Випадкова величина Y описує величину позову, якщо страховий випадок відбувся. Випадкову величину Y називатимемо *величиною дійсно поданого позову.*

Наслідок. *Функція розподілу $F_Y(x)$ дійсно поданого позову Y дорівнює умовній функції розподілу позову X відносно події $\{X > 0\}$, тобто*

$$F_Y(x) = P\{Y < x\} = P\{X < x | X > 0\}, \;\; x > 0,$$

$$F_Y(x) = 0, \;\; x \leq 0.$$

Д о в е д е н н я. Нехай $x > 0$. Тоді

$$F_X(x) = 1 - P\{X \geq x\} = 1 - P\{IY \geq x\} = 1 - P\{I = 1\}P\{Y \geq x\} =$$

$$= 1 - P\{X > 0\}P\{Y \geq x\} = 1 - P\{X > 0\}(1 - P\{Y < x\}) =$$

$$= 1 - P\{X > 0\} + P\{X > 0\}P\{Y < x\}.$$

Звідси

$$-P\{X \geq x\} = -P\{X > 0\} + P\{X > 0\}P\{Y < x\},$$

$$P\{X > 0\} - P\{X \geq x\} = P\{X > 0\}P\{Y < x\},$$

$$P\{Y < x\} = \frac{P(\{X > 0\} \setminus \{X \geq x\})}{P\{X > 0\}} =$$

$$= \frac{P\{0 < X < x\}}{P\{X > 0\}} = P\{X < x | X > 0\}.$$

Очевидно, для $x \leq 0$

$$F_Y(x) = P\{X < x | X > 0\} = 0.$$

Наслідок доведено.

За розподілом випадкових величин I та Y завжди можна знайти розподіл X.

Теорема 1.2.2. *Нехай*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - p_0' & p_0' \end{pmatrix}$$

— розподіл випадкової величини I,

$$P\{Y = b_i\} = p_i', \quad i = 1, 2, \ldots$$

— розподіл випадкової величини Y. Тоді

$$P\{X = 0\} = p_0',$$

$$P\{X = b_i\} = (1 - p_0')p_i', \quad i = 1, 2, \ldots$$

Д о в е д е н н я. Подія $\{Y > 0\}$ вірогідна, тому

$$P\{X = 0\} = P\{IY = 0\} = P\{I = 0, Y > 0\} = P\{I = 0\} = p_0'.$$

Далі, враховуючи, що випадкові величини I та Y незалежні, маємо

$$P\{X = b_i\} = P\{IY = b_i\} = P\{I = 1, Y = b_i\} =$$

$$= P\{I = 1\}P\{Y = b_i\} = (1 - p_0')p_i', \quad i = 1, 2, \ldots$$

Приклад 1.2.1. *Розглянемо страхування життя на один рік з величиною страхової виплати $b = 100\,000$ грн, імовірність смерті застрахованого $q = 0,0025$. Знайти розподіли випадкових величин I та Y.*

Р о з в ' я з а н н я . Розподілом X є

$$\begin{pmatrix} 0 & 100\,000 \\ 0,9975 & 0,0025 \end{pmatrix}.$$

Розподілом I є

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,9975 & 0,0025 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$P\{Y = 100\,000\} = P\{X = 100\,000 | X > 0\} =$$

$$= \frac{P\{X = 100\,000\}}{P\{X > 0\}} = \frac{0,0025}{1 - 0,9975} = 1.$$

Приклад 1.2.2. *Розглянемо страхування життя на один рік з виплатою* $b_1 = 500\,000$ *грн у випадку смерті від нещасного випадку (ймовірність цієї події* $q_1 = 0,0005$*) і виплатою* $b_2 = 100\,000$ *грн у випадку смерті внаслідок природних причин (імовірність цієї події* $q_2 = 0,0020$*). Знайти розподіли величин* I *та* Y.

Р о з в ' я з а н н я . Розподілом X є

$$\begin{pmatrix} 0 & 100\,000 & 500\,000 \\ 0,9975 & 0,0020 & 0,0005 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо розподіл I.

$$P\{I = 1\} = P\{X > 0\} =$$

$$= P\{X = 500\,000\} + P\{X = 100\,000\} = 0,0025,$$

$$P\{I = 0\} = P\{X = 0\} = 0,9975,$$

тобто розподілом I є

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,9975 & 0,0025 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$P\{Y = 500\,000\} = P\{X = 500\,000 | X > 0\} =$$

$$= \frac{P\{X = 500\,000\}}{P\{X > 0\}} = 0,2.$$

$$P\{Y = 100\,000\} = P\{X = 100\,000 | X > 0\} =$$

$$= \frac{P\{X = 100\,000\}}{P\{X > 0\}} = 0,8,$$

отже, розподілом Y є

$$\begin{pmatrix} 500\,000 & 100\,000 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Структурування позову в договорах: один договір — декілька позовів. У деяких видах страхування один договір за час своєї дії може породити декілька позовів (наприклад, договір страхування автомобіля). У цьому випадку величину позову X за даним договором зручно подати у вигляді

$$X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_\nu \,, \tag{1.2.2}$$

де ν — число позовів, породжених даним договором; Y_i — величина дійсно поданого позову в i-му страховому випадку за даним договором (ν і Y_i — незалежні). Щодо випадкових величин Y_i, $i = 1, 2, \ldots$ природно припускати, що вони незалежні та однаково розподілені. Зазначимо, що модель (1.2.1) можна розглядати як окремий випадок моделі (1.2.2).

Подання індивідуального позову у вигляді (1.2.2) дозволяє розділити вплив різних факторів на величину позову X: на частоту настання страхових випадків (страховий випадок описується величинами I та ν) впливають одні фактори, а на величину дійсно поданого позову Y — інші. Наприклад, у разі страхування автомобіля від ушкодження в дорожньо-транспортній пригоді частота попадання його в дорожньо-транспортну пригоду в першу чергу залежить від віку водія, а вартість ремонту визначається моделлю автомобіля.

Теорема 1.2.3. *Нехай*

$$X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_\nu \ ,$$

де Y_i — незалежні однаково розподілені випадкові величини, випадкова величина ν набуває цілих невід'ємних значень і не залежить від випадкових величин Y_i. Тоді

$$MX = MY_1 M\nu,$$

$$MX^2 = MY_1^2 M\nu + (MY_1)^2 M\nu(\nu-1),$$

$$DX = DY_1 M\nu + (MY_1)^2 D\nu.$$

Д о в е д е н н я. Дійсно,

$$MX = M\sum_{i=1}^{\nu} Y_i = MY_1 M\nu.$$

Обчислимо MX^2:

$$MX^2 = M(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu)^2 =$$

$$= M\left((Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu)^2, \bigcup_{k=0}^{\infty}\{\nu = k\}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} M((Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu)^2, \{\nu = k\}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} M((Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_k)^2, \{\nu = k\}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} M(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_k)^2 I_{\{\nu=k\}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} M(Y_1 + \ldots + Y_k)^2 MI_{\{\nu=k\}} = \sum_{k=1}^{\infty} M(Y_1 + \ldots + Y_k)^2 P\{\nu = k\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P\{\nu = k\} M\left(\sum_{i=1}^{k} Y_i^2 + 2\sum_{i\neq j} Y_i Y_j\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P\{\nu = k\}\left(kMY_1^2 + 2\frac{k(k-1)}{2}(MY_1)^2\right) =$$

$$= MY_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} kP\{\nu = k\} + (MY_1)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)P\{\nu = k\} =$$

$$= MY_1^2 M\nu + (MY_1)^2 M\nu(\nu-1).$$

Дисперсія DX дорівнює

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = MY_1^2 M\nu + (MY_1)^2 M\nu(\nu-1) - (MY_1 M\nu)^2 =$$

$$= MY_1^2 M\nu + (MY_1)^2(M\nu^2 - M\nu) - (MY_1)^2(M\nu)^2 =$$

$$= M\nu(MY_1^2 - (MY_1)^2) + (MY_1)^2 M\nu^2 - (MY_1)^2(M\nu)^2 =$$

$$= M\nu(MY_1^2 - (MY_1)^2) + (MY_1)^2(M\nu^2 - (M\nu)^2) =$$

$$= DY_1 M\nu + (MY_1)^2 D\nu.$$

Наслідок. *У моделі (1.2.1)*

$$MX = MYP\{I = 1\},$$

$$MX^2 = MY^2 P\{I = 1\},$$

$$DX = DYP\{I = 1\} + (MY)^2 P\{I = 1\}P\{I = 0\}.$$

Д о в е д е н н я. Модель (1.2.1) є окремим випадком моделі (1.2.2) за умов, що ν набуває лише двох можливих значень: 0 і 1 (випадок $\nu = 0$ відповідає ситуації, коли позов не буде поданий).

Зазначимо, що

$$M\nu = M\nu^2 = P\{I = 1\}.$$

Тому

$$MX = MYM\nu = MYP\{I = 1\},$$

$$MX^2 = MY^2 M\nu + (MY)^2(M\nu^2 - M\nu) = MY^2 P\{I = 1\},$$

$$DX = DYM\nu + (MY)^2 D\nu = DYP\{I = 1\} + (MY)^2(M\nu^2 - (M\nu)^2) =$$

$$= DYP\{I = 1\} + (MY)^2(P\{I = 1\} - (P\{I = 1\})^2) =$$

$$= DYP\{I = 1\} + (MY)^2 P\{I = 1\}P\{I = 0\}.$$

1.3. Генератриси

Далі ми будемо мати справу з випадковими величинами, які набувають невід'ємних цілочислових значень. Розглядаючи такі випадкові величини, доцільно застосовувати метод генератрис.

Означення. Нехай $a_0, a_1, a_2, \dots$ — послідовність дійсних чисел. Якщо ряд

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j s^j \qquad (1.3.1)$$

збігається в певному інтервалі $-s_0 < s < s_0$, то функцію $A(s)$ називатимемо *генератрисою послідовності* $\{a_j\}$.

Якщо послідовність $\{a_j\}$ обмежена ($|a_j| \le C$), то з нерівності

$$|a_j s^j| \le C|s|^j$$

випливає, що

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_j s^j| \le C \sum_{j=0}^{\infty} |s|^j = \frac{C}{1-|s|},$$

а тому ряд (1.3.1) збігається принаймні при $|s| < 1$.

Розглянемо цілочислову випадкову величину X із розподілом

$$P\{X = j\} = p_j, \quad j = 0, 1, \dots$$

Нехай

$$q_k = P\{X > k\} = P\{X = k+1\} + P\{X = k+2\} + \dots =$$
$$= p_{k+1} + p_{k+2} + \dots, \qquad k \ge 0.$$

Розглянемо генератриси послідовностей $\{p_j\}$ і $\{q_k\}$:

$$P(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j,$$

$$Q(s) = q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} q_k s^k.$$

Обидва ряди абсолютно збігаються (при $|s| < 1$):

$$\sum_{j=0}^{\infty} |p_j s^j| \le \sum_{j=0}^{\infty} |s|^j = \frac{1}{1-|s|} \ ,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |q_k s^k| \le \sum_{k=0}^{\infty} |s|^k = \frac{1}{1-|s|} \ .$$

Далі оскільки

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1,$$

то $P(1) = 1$, тому ряд

$$P(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j$$

абсолютно збігається принаймні при $-1 \le s \le 1$.

Теорема 1.3.1. *При $-1 < s < 1$ має місце рівність*

$$Q(s) = \frac{1 - P(s)}{1 - s}.$$

Д о в е д е н н я. Випишемо розклади для функцій $(1-s)Q(s)$ та $1 - P(s)$ в ряди:

$$(1-s)Q(s) = Q(s) - sQ(s) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j s^j - \sum_{j=0}^{\infty} q_j s^{j+1} =$$

$$= (q_0 s^0 + q_1 s^1 + q_2 s^2 + \dots + q_n s^n + \dots) - (q_0 s^1 + q_1 s^2 + \dots + q_{n-1} s^n + \dots) =$$
$$= q_0 s^0 + (q_1 - q_0)s^1 + (q_2 - q_1)s^2 + \dots + (q_n - q_{n-1})s^n + \dots,$$

$$1 - P(s) = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} p_j s^j = 1 - p_0 s^0 - p_1 s^1 - \dots - p_n s^n - \dots =$$
$$= (1 - p_0)s^0 - p_1 s^1 - \dots - p_n s^n - \dots$$

Порівняємо коефіцієнти при s^n $(n \geq 0)$ у розкладах функцій $(1-s)Q(s)$ та $1-P(s)$.

Коефіцієнт при s^n $(n \geq 1)$ у розкладі $(1-s)Q(s)$ дорівнює

$$q_n - q_{n-1} = (p_{n+1} + p_{n+2} + \ldots) - (p_n + p_{n+1} + \ldots) = -p_n,$$

тобто

$$q_n - q_{n-1} = -p_n \quad \text{при } n \geq 1,$$

отже, коефіцієнти при s^n, $n = 1, 2, \ \ldots$ в $(1-s)Q(s)$ і в $1-P(s)$ збігаються.

Коефіцієнт при s^0 у розкладі $(1-s)Q(s)$ дорівнює q_0, а в розкладі $1-P(s)$ — $1-p_0$. Але за означенням q_0 дорівнює

$$q_0 = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots = 1 - p_0.$$

Теорема доведена.

Теорема 1.3.2. (теорема Абеля). 1) *Якщо ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k s^k$, $|s| \leq 1$, *у точці* $s = 1$ *збігається абсолютно, то існує* $\lim\limits_{s \uparrow 1} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k s^k$ *і*

$$\lim_{s \uparrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

2) *У припущенні* $a_k \geq 0$, $k = 0, 1 \ldots$ *з існування границі* $\lim\limits_{s \uparrow 1} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k s^k$ *(скінченної чи нескінченної) випливає рівність*

$$\lim_{s \uparrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Теорема 1.3.3. *Якщо MX існує, то*

$$MX = \sum_{j=1}^{\infty} j p_j = \sum_{k=0}^{\infty} q_k,$$

або

$$MX = P'(1) = Q(1).$$

Доведення. Ряд $P(s) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} p_j s^j$ абсолютно збігається принаймні при $-1 \leq s \leq 1$. Тому його можна здиференціювати за s

$$P'(s) = \sum_{j=1}^{\infty} j p_j s^{j-1}.$$

Нехай $MX = \sum\limits_{j=0}^{\infty} j p_j$ існує. За означенням математичного сподівання ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} j p_j$ збігається абсолютно.

Теорема Абеля гарантує неперервність суми ряду $P'(s) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} j p_j s^{j-1}$ у точці $s = 1$, тому

$$\lim_{s \uparrow 1} P'(s) = P'(1) = \sum_{j=1}^{\infty} j p_j 1^{j-1} = \sum_{j=1}^{\infty} j p_j,$$

тобто

$$MX = P'(1).$$

Застосуємо теорему про середнє до правої частини рівності

$$Q(s) = \frac{1 - P(s)}{1 - s} = \frac{P(1) - P(s)}{1 - s}.$$

Одержимо

$$Q(s) = P'(t),$$

де $t \in (s; 1)$.

Функція $Q(s)$ монотонно зростає на проміжку (0;1), тому при $s \uparrow 1$ вона має границю

$$\lim_{s \uparrow 1} Q(s) = P'(1) = MX.$$

Але

$$MX = \sum_{k=0}^{\infty} q_k,$$

тому
$$Q(s)=\sum_{k=0}^{\infty} q_k s^k$$
збігається в точці $s=1$, а отже, згідно з теоремою Абеля, $Q(s)$ неперервна в точці $s=1$, тому
$$MX=Q(1).$$
Розглянемо тепер випадок, коли
$$MX=\sum_{j=0}^{\infty} jp_j=\infty.$$
$P'(s)=\sum\limits_{j=1}^{\infty} jp_j s^{j-1}$ збігається до ∞ при $s\uparrow 1$, і
$$Q(s)=\frac{1-P(s)}{1-s}$$
збігається до $+\infty$ при $s\uparrow 1$.

Таким чином, як у випадку скінченного, так і нескінченного математичного сподівання,
$$MX=\lim_{s\uparrow 1} P'(s)=\lim_{s\uparrow 1} Q(s),$$
або
$$MX=P'(1)=Q(1).$$
Теорема доведена.

Теорема 1.3.4. *За умови* $MX^2<\infty$
$$MX(X-1)=P''(1)=2Q'(1),$$
$$DX=P''(1)+P'(1)-(P'(1))^2=2Q'(1)+Q(1)-Q^2(1).$$

Доведення. Ряд $P'(s)=\sum\limits_{j=1}^{\infty} jp_j s^{j-1}$ абсолютно збігається принаймні при $-1\le s\le 1$. Тому його можна здиференціювати за s:
$$P''(s)=\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)p_j s^{j-2}.$$

Нехай $MX(X-1)=\sum\limits_{j=2}^{\infty} j(j-1)p_j$ існує, тоді за означенням математичного сподівання ряд $\sum\limits_{j=2}^{\infty} j(j-1)p_j$ абсолютно збігається.

За теоремою Абеля сума ряду $P''(s)=\sum\limits_{j=2}^{\infty} j(j-1)p_j s^{j-2}$ неперервна в точці $s=1$, тому
$$\lim_{s\uparrow 1} P''(s)=P''(1)=\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)p_j,$$
тобто
$$MX(X-1)=P''(1).$$
Здиференціюємо за s рівність
$$Q(s)=\frac{1-P(s)}{1-s}.$$
Одержимо
$$Q'(s)=\frac{-P'(s)(1-s)+1-P(s)}{(1-s)^2},$$
$$(1-s)Q'(s)=-P'(s)+\frac{1-P(s)}{1-s},$$
$$(1-s)Q'(s)=-P'(s)+Q(s),$$
$$P'(s)=Q(s)-(1-s)Q'(s).$$
Здиференціюємо останню рівність за s:
$$P''(s)=2Q'(s)-(1-s)Q''(s).$$
Одержимо
$$MX(X-1)=P''(1)=2Q'(1).$$
Тоді
$$DX=MX^2-(MX)^2=MX(X-1)+MX-(MX)^2=$$
$$=P''(1)+P'(1)-(P'(1))^2=2Q'(1)+Q(1)-Q^2(1).$$

Означення. Нехай X — цілочислова невід'ємна випадкова величина з розподілом $P\{X = k\} = p_k$, $k \geq 0$. *Генератрисою* $g(z)$ *випадкової величини* X називається функція

$$g(z) = Mz^X = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k,$$

визначена для комплексних $z : |z| \leq 1$.

Розглянемо деякі властивості генератрис.

Властивість 1. *Якщо генератриси $g_1(z)$ і $g_2(z)$ випадкових величин X_1 і X_2 збігаються, то збігаються і розподіли цих величин (розподіл можна однозначно відновити за його генератрисою).*

Доведення. Для того щоб визначити $P\{X = k\}$ за його генератрисою $g(z)$, розкладемо $g(z)$ у ряд Тейлора:

$$g(z) = g(0) + g'(0)z + \frac{g''(0)}{2!}z^2 + \ldots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}z^n + \ldots .$$

Коефіцієнт при z^n дорівнює імовірності $P\{X = n\}$.

Властивість 2. *Якщо випадкові величини X_1 та X_2 незалежні, то генератриса їх суми дорівнює добутку генератрис доданків:*

$$g_{X_1+X_2}(z) = g_{X_1}(z)\, g_{X_2}(z).$$

Доведення.

$$g(z) = Mz^{X_1+X_2} = Mz^{X_1}z^{X_2} = Mz^{X_1}Mz^{X_2} = g_{X_1}(z)\, g_{X_2}(z).$$

Властивість 3. *Нехай g — генератриса випадкової величини X, а φ — її характеристична функція, тоді*

$$g(e^{iz}) = \varphi(z).$$

Приклад 1.3.1. (біномний розподіл). *Нехай випадкова величина X має біномний розподіл з параметрами n, p. Обчислити MX, DX.*

Генератриса випадкової величини X дорівнює

$$g(z) = Mz^X = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} z^k = (1 - p + pz)^n.$$

Перша похідна генератриси дорівнює

$$g'(z) = np(1 - p + pz)^{n-1},$$

тому

$$MX = g'(1) = np.$$

Друга похідна генератриси дорівнює

$$g''(z) = n(n-1)p^2(1 - p + pz)^{n-2},$$

тому

$$DX = g''(1) + g'(1) - (g'(1))^2 = np(1-p).$$

Приклад 1.3.2. (розподіл Пуассона). *Нехай випадкова величина X має пуассонів розподіл з параметром λ. Обчислити MX, DX.*

Генератриса випадкової величини X дорівнює

$$g(z) = Mz^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} z^k = e^{-\lambda + z\lambda}.$$

Перша похідна генератриси дорівнює

$$g'(z) = \lambda e^{-\lambda + z\lambda},$$

тому

$$MX = g'(1) = \lambda.$$

Друга похідна генератриси дорівнює

$$g''(z) = \lambda^2 e^{-\lambda + z\lambda},$$

тому

$$DX = g''(1) + g'(1) - (g'(1))^2 = \lambda.$$

1.4. Перетворення Лапласа

Проаналізуємо випадкові величини, які набувають невід'ємних значень, застосовуючи перетворення Лапласа.

Означення. Нехай F — імовірнісний розподіл, зосереджений на $[0, +\infty)$. *Перетворенням Лапласа* φ розподілу F називатимемо функцію $\varphi(s)$, означену для $s \geq 0$ рівністю

$$\varphi(s) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-sx} F(dx). \tag{1.4.1}$$

Означення. Нехай Y — невід'ємна випадкова величина, F — її розподіл. *Перетворенням Лапласа випадкової величини* Y називатимемо функцію $\varphi(s)$, означену для $s \geq 0$ рівністю

$$\varphi(s) = Me^{-sY} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-sx} F(dx). \tag{1.4.2}$$

Якщо розподіл F (розподіл випадкової величини Y) має щільність f, то

$$\varphi(s) = Me^{-sY} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)dx. \tag{1.4.3}$$

Якщо розподіл F (розподіл випадкової величини Y) дискретний (тобто $F : x_k \to F(\{x_k\}) > 0, \quad k = 1, 2, \ldots; \sum\limits_{x_k} F(\{x_k\}) = 1$), то

$$\varphi(s) = Me^{-sY} = \sum_{x_k} e^{-sx_k} F(\{x_k\}). \tag{1.4.4}$$

Приклад 1.4.1. *Випадкова величина* Y *набуває значень* $0, 1, \ldots$ *з імовірностями* $P\{Y = k\} = p_k, \ k = 0, 1, \ldots$ *Знайти перетворення Лапласа випадкової величини* Y.

Перетворення Лапласа випадкової величини Y дорівнює

$$\varphi(s) = Me^{-sY} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-sk} p_k = P(e^{-s}),$$

де P — генератриса випадкової величини Y. Перетворення Лапласа відрізняється від генератриси лише заміною змінної $t = e^{-s}$.

Теорема 1.4.1. (теорема єдиності). *Різним імовірнісним розподілам відповідають різні перетворення Лапласа.*

Теорема 1.4.2. (теорема неперервності). *Нехай* F_n, $n = 1, 2, \ldots$ — *послідовність імовірнісних розподілів,* φ_n — *їх перетворення Лапласа. Якщо* F_n *збігається до* F *(властиво чи невластиво), то послідовність* $\varphi_n(s)$ *при* $s > 0$ *збігається до функції* $\varphi(s)$, *яка є перетворенням Лапласа граничного розподілу* F. *Навпаки, якщо послідовність перетворень Лапласа* $\varphi_n(s)$ *збігається при кожному* $s > 0$ *до границі* $\varphi(s)$, *то* φ — *перетворення Лапласа розподілу* F *(властивого чи невластивого), причому* F_n *збігається до* F.

Граничний розподіл є властивим тоді і тільки тоді, коли $\varphi(s) \to 1$ *при* $s \to 0$.

В л а с т и в і с т ь 1. *Перетворення Лапласа суми незалежних випадкових величин дорівнює добутку перетворень Лапласа доданків, або, в термінах згорток, перетворення Лапласа згортки ймовірнісних розподілів дорівнює добутку перетворень Лапласа цих розподілів.*

Д о в е д е н н я. Нехай X та Y — незалежні випадкові величини з розподілами F та G відповідно, $\varphi(s)$ та $\psi(s)$ — їх перетворення Лапласа. Обчислимо перетворення Лапласа суми $X + Y$. Зазначимо, що перетворення Лапласа $X+Y$ буде також перетворенням Лапласа згортки $F * G$, оскільки розподіл суми незалежних випадкових величин дорівнює згортці розподілів доданків. Маємо

$$Me^{-(X+Y)s} = Me^{-Xs}e^{-Ys} = Me^{-Xs}Me^{-Ys} = \varphi(s)\psi(s).$$

Ми скористались тим, що математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань.

В л а с т и в і с т ь 2. *Нехай* F — *імовірнісний розподіл,* φ — *його перетворення Лапласа. Тоді* φ *має похідні всіх порядків, при цьому*

$$(-1)^n \varphi^{(n)}(s) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-sx} x^n F(dx) \tag{1.4.5}$$

для $s > 0$.

Наслідок 1. *Розподіл F має скінченний n-й момент тоді й тільки тоді, коли існує скінченна границя $\varphi^{(n)}(0)$, за цих умов*

$$(-1)^n\varphi^{(n)}(0)=m_n,$$

де m_n — n-й момент розподілу F.

Зокрема, при $n=1,2$ маємо

$$-\varphi'(0)=\int\limits_0^{+\infty}xF(dx)=MY, \tag{1.4.6}$$

$$\varphi''(0)=\int\limits_0^{+\infty}x^2F(dx)=MY^2. \tag{1.4.7}$$

Тому дисперсія випадкової величини Y дорівнює

$$DY=MY^2-(MY)^2=\varphi''(0)-(\varphi'(0))^2. \tag{1.4.8}$$

Приклад 1.4.2. (рівномірний розподіл). *Нехай випадкова величина Y має рівномірний розподіл на відрізку $[a,b]$, $0<a<b$. Обчислити MY, MY^2, DY у термінах перетворення Лапласа.*

Перетворення Лапласа випадкової величини Y дорівнює

$$\varphi(s)=Me^{-sY}=\int\limits_a^b\frac{1}{b-a}\,e^{-sx}dx=\frac{e^{-sa}-e^{-sb}}{(b-a)s}.$$

Перша похідна перетворення Лапласа дорівнює

$$\varphi'(s)=\frac{ae^{-sa}-be^{-sb}}{(a-b)s}-\frac{e^{-sa}-e^{-sb}}{(b-a)s^2},$$

тому з рівності (1.4.6)

$$MY=-\varphi'(0)=-\lim_{s\to0}\varphi'(s)=\frac{b+a}{2}.$$

Друга похідна перетворення Лапласа дорівнює

$$\varphi''(s)=\frac{a^2e^{-sa}-b^2e^{-sb}}{(a-b)s}-\frac{2(ae^{-sa}-be^{-sb})}{(b-a)s^2}+\frac{2(e^{-sa}-e^{-sb})}{(a-b)s^3},$$

тому з рівності (1.4.7)

$$MY^2=\varphi''(0)=\lim_{s\to0}\varphi''(s)=\frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

Дисперсія випадкової величини Y дорівнює

$$DY=MY^2-(MY)^2=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Приклад 1.4.3. (експоненціальний розподіл). *Нехай випадкова величина Y має експоненціальний розподіл з параметром λ. Обчислити MY, MY^2, DY.*

Перетворення Лапласа випадкової величини Y дорівнює

$$\varphi(s)=Me^{-sY}=\int\limits_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}e^{-sx}dx=\frac{\lambda}{s+\lambda}.$$

Перша похідна перетворення Лапласа дорівнює

$$\varphi'(s)=\frac{-\lambda}{(s+\lambda)^2},$$

тому з рівності (1.4.6)

$$MY=-\varphi'(0)=\frac{1}{\lambda}.$$

Друга похідна перетворення Лапласа дорівнює

$$\varphi''(s)=\frac{2\lambda}{(s+\lambda)^3},$$

тому з рівності (1.4.7)

$$MY^2=\varphi''(0)=\frac{2}{\lambda^2}.$$

Дисперсія випадкової величини Y дорівнює

$$DY=MY^2-(MY)^2=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Приклад 1.4.4. (гамма-розподіл). *Нехай випадкова величина Y має гамма-розподіл з параметрами λ, α. Обчислити MY, MY^2, DY.*

Перетворення Лапласа випадкової величини Y дорівнює

$$\varphi(s) = Me^{-sY} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} e^{-sx} dx = \left(1 + \frac{s}{\lambda}\right)^{-\alpha}.$$

Перша похідна перетворення Лапласа дорівнює

$$\varphi'(s) = -\frac{\alpha}{\lambda}\left(1 + \frac{s}{\lambda}\right)^{-\alpha-1},$$

тому з рівності (1.4.6) маємо

$$MY = -\varphi'(0) = \frac{\alpha}{\lambda}.$$

Друга похідна перетворення Лапласа дорівнює

$$\varphi''(s) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}\left(1 + \frac{s}{\lambda}\right)^{-\alpha-2},$$

тому з рівності (1.4.7) випливає

$$MY^2 = \varphi''(0) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}.$$

Дисперсія випадкової величини Y дорівнює

$$DY = MY^2 - (MY)^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

1.5. Неперервні моделі індивідуальних позовів

Математична модель індивідуального позову X — це випадкова величина. Причому X завжди можна подати у вигляді добутку:

$$X = IY$$

[див. рівність (1.2.1)], де I — індикатор події "страховий випадок відбувся", Y — величина дійсно поданого позову.

Якщо розподіл випадкової величини Y не має атомів, то модель $X = IY$ індивідуального позову називається *неперервною*. (Ми не можемо означити неперервну модель у термінах випадкової величини X, оскільки X завжди має атом у точці 0.)

Оскільки $Y > 0$, то її розподіл F зосереджений на $(0; +\infty)$, при цьому

$$Mg(Y) = \int\limits_0^{+\infty} g(x)F(dx),$$

$$MY = \int\limits_0^{+\infty} xF(dx),$$

якщо тільки відповідні математичні сподівання існують.

Зокрема, якщо випадкова величина Y абсолютно неперервна зі щільністю f, то

$$MY = \int\limits_0^{+\infty} xf(x)dx, \qquad MY^2 = \int\limits_0^{+\infty} x^2 f(x)dx.$$

Теорема 1.5.1. *Якщо Y — абсолютно неперервна випадкова величина, яка набуває невід'ємних значень, $F(x)$ — її функція розподілу, то*

$$MY = \int\limits_0^{+\infty} (1 - F(x))\,dx, \tag{1.5.1}$$

$$MY^2 = 2\int\limits_0^{+\infty} x(1 - F(x))\,dx. \tag{1.5.2}$$

Д о в е д е н н я. Доведемо, що MY можна обчислити за формулою (1.5.1).

По-перше, зазначимо, що

$$\int\limits_A^{+\infty} xf(x)dx \geq A\int\limits_A^{+\infty} f(x)dx = A(1 - F(A)).$$

І оскільки $MY < \infty$, тобто $\int\limits_0^{+\infty} xf(x)dx < +\infty$, то при $A \to \infty$

$$\int\limits_A^{+\infty} xf(x)dx \to 0.$$

Отже,

$$\lim_{A\to+\infty} A(1 - F(A)) = 0.$$

Далі

$$MY = \int\limits_0^{+\infty} xf(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_0^{A} xf(x)dx =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \int\limits_0^{A} xdF(x) = -\lim_{A\to+\infty} \int\limits_0^{A} xd(1 - F(x)) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left(-x(1 - F(x))\Big|_0^A + \int\limits_0^{A} (1 - F(x))dx \right).$$

Перейдемо до границі при $A \to +\infty$ і одержимо формулу (1.5.1).

Рівність (1.5.2) доводиться аналогічно.

Теорема доведена.

Приклади розподілів дійсно поданого позову. Наведені далі приклади розподілів дійсно поданого позову часто зустрічаються в теорії ризику.

Рівномірний розподіл. Хоча рівномірний розподіл дійсно поданого позову не типовий у теорії ризику, але у зв'язку зі своєю простотою він часто наводиться в прикладах.

Щільність рівномірного на проміжку $[a; b]$ розподілу дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{якщо } x \in [a; b]; \\ 0, & \text{якщо } x \notin [a; b]. \end{cases}$$

Функція рівномірного на проміжку $[a; b]$ розподілу дорівнює

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{якщо } x \in [a; b]; \\ 1, & \text{якщо } x \geq b. \end{cases}$$

Моменти рівномірного на $[a; b]$ розподілу

$$MY = \frac{a+b}{2}, \quad DY = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad MY^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}.$$

Експоненціальний розподіл. Описує позови в таких видах страхування, для яких більшість позовів є малими, а великі позови хоча й можливі, але спостерігаються рідко.

Щільність експоненціального розподілу з параметром λ

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp\{-\lambda x\}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \leq 0. \end{cases}$$

Функція розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp\{-\lambda x\}, & \text{якщо } x > 0; \\ 0, & \text{якщо } x \leq 0. \end{cases}$$

Моменти експоненціального розподілу з параметром λ

$$MY = \frac{1}{\lambda}, \quad DY = \frac{1}{\lambda^2}, \quad MY^2 = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Розподіл Парето. На відміну від експоненціального розподілу для позовів, що мають розподіл Парето, ймовірності великих значень позовів відносно великі; вони спадають за степеневим законом, а не за показниковим. Отже, для розподілу Парето характерні часті великі позови.

Щільність розподілу Парето з параметрами α і b ($\alpha > 0$, $b > 0$) дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} \alpha b^{\alpha} x^{-\alpha-1}, & x > b, \\ 0, & x \leq b. \end{cases}$$

Функція розподілу Парето

$$F(x) = \begin{cases} 1 - (x/b)^{-\alpha}, & x > b, \\ 0, & x \leq b. \end{cases}$$

Моменти розподілу Парето

$$MY^k = \alpha b^k / (\alpha - k) \quad (k < \alpha).$$

Розподіл Парето з нульовою точкою. Щільність розподілу Парето з нульовою точкою з параметрами $(\alpha;\lambda)$ дорівнює

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\alpha}{\lambda}\left(\dfrac{\lambda}{x+\lambda}\right)^{\alpha+1}, & \text{якщо } x>0;\\ 0, & \text{якщо } x\le 0,\end{cases}$$

$\alpha>0,\ \lambda>0$.

Функція розподілу Парето з нульовою точкою

$$F(x)=\begin{cases} 1-\left(\dfrac{\lambda}{x+\lambda}\right)^{\alpha}, & \text{якщо } x>0;\\ 0, & \text{якщо } x\le 0.\end{cases}$$

Моменти розподілу Парето з нульовою точкою

$$MY=\int_0^{+\infty}(1-F(x))dx=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\lambda}{x+\lambda}\right)^{\alpha}dx=\frac{\lambda}{\alpha-1}\quad(\alpha>1),$$

$$MY^2=2\int_0^{+\infty}x(1-F(x))dx=\frac{2\lambda^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)}\quad(\alpha>2),$$

$$DY=\frac{\lambda^2\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}\quad(\alpha>2).$$

Гамма-розподіл. Зазначимо, що при $\alpha>1$ гамма-розподіл добре моделює ситуацію, коли в основному ризики групуються навколо деякого значення, а великі ризики хоча й можливі, але малоймовірні.

Щільність гамма-розподілу з параметрами $(\alpha;\lambda)$ $(\lambda>0,\ \alpha>0)$ дорівнює

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\exp\{-\lambda x\}, & \text{якщо } x>0;\\ 0, & \text{якщо } x\le 0.\end{cases}$$

Моменти гамма-розподілу

$$MY=\frac{\alpha}{\lambda},\qquad MY^2=\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2},\qquad DY=\frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

Логнормальний розподіл. Щільність логнормального розподілу з параметрами (μ,σ) $(\sigma>0)$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\dfrac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

Функція логнормального розподілу

$$F(x)=\begin{cases} N_{0;1}\left(\dfrac{\ln x-\mu}{\sigma}\right), & x>0;\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

де $N_{0;1}(x)$ — функція нормального розподілу з параметрами (0;1).

Моменти логнормального розподілу

$$MY^k=\exp\{k\mu+k^2\sigma^2/2\}.$$

Логарифмований розподіл Лапласа. Щільність логарифмованого розподілу Лапласа з параметрами (α,b) $(\alpha>0,b>0)$

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ \alpha(x/b)^{\alpha-1}/(2b), & 0<x\le b;\\ \alpha(x/b)^{-\alpha-1}/(2b), & x>b.\end{cases}$$

Функція логарифмованого розподілу Лапласа

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ 0,5(x/b)^{\alpha}, & 0<x\le b;\\ 1-0,5(x/b)^{-\alpha}, & x>b.\end{cases}$$

Моменти логарифмованого розподілу Лапласа

$$MY^k=b^k\frac{\alpha^2}{(\alpha+k)(\alpha-k)}\quad(k<\alpha).$$

Розподіл Вейбулла. Щільність розподілу Вейбулла з параметрами (α,b) $(\alpha>0,b>0)$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\alpha}{b}\left(\dfrac{x}{b}\right)^{\alpha-1}\exp\left\{-(x/b)^{\alpha}\right\}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

Функція розподілу Вейбулла

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left\{-(x/b)^\alpha\right\}, & x > 0; \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Моменти розподілу Вейбулла

$$MY^k = b^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{\alpha}\right).$$

Логарифмований логістичний розподіл. Щільність логарифмованого логістичного розподілу з параметрами (α, b) $(\alpha > 0, b > 0)$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha (x/b)^{-\alpha-1}}{b(1 + (x/b)^{-\alpha})^2}, & x > 0; \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Функція логарифмованого логістичного розподілу

$$F(x) = \begin{cases} \left(1 + \left(\dfrac{x}{b}\right)^{-\alpha}\right)^{-1}, & x > 0; \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Моменти логарифмованого логістичного розподілу

$$MY^k = b^k \frac{k\pi/\alpha}{\sin(k\pi/\alpha)} \quad (k < \alpha).$$

1.6. Спеціальні умови договорів страхування

Розглянемо договір страхування між страховою компанією та клієнтом, причому будемо вважати, що за період дії договору може надійти тільки один позов.

Позначимо через U втрати клієнта за період дії договору (розподіл випадкової величини U має атом у точці 0). Нехай

$$J = \begin{cases} 1, & \text{якщо } U > 0; \\ 0, & \text{якщо } U = 0. \end{cases}$$

Аналогічно до того, як була означена величина Y дійсно поданого позову [див. рівність (1.2.1)] рівністю

$$U = JZ$$

означаємо величину Z втрат клієнта, якщо вони справді були за період дії договору (при цьому J і Z — незалежні випадкові величини).

До цього моменту величина X індивідуального позову до страхової компанії дорівнювала величині U втрат клієнта, тобто $X = U$; величина дійсно поданого позову Y дорівнювала величині Z дійсно зазнаних втрат клієнта, якщо вони дійсно були, тобто $Y = Z$. Але насправді це не так. Договір страхування завжди містить умови, згідно з якими страхова компанія сплачує не всю величину збитків, зазнаних внаслідок страхового випадку, а тільки їх частину.

Розглянемо деякі з таких умов договорів страхування.

1. Франшиза. Якщо втрати клієнта U не перевищують певної границі d, то страхова компанія позов не приймає, а якщо втрати клієнта перевищують d, то позов приймається, але виплачується тільки частина позову, що перевищує d. Величину d називають франшизою. Дану умову договору страхування можна записати так:

$$X = \begin{cases} 0, & \text{якщо } U \le d; \\ U - d, & \text{якщо } U > d, \end{cases}$$

або

$$X = (U - d)^+ = \max\{0, U - d\}$$

(див. також рис. 1.6.1).

Рис. 1.6.1. Залежність позову X клієнта від втрат U

Зазначимо, що маса $P\{X=0\}$ у нулі розподілу випадкової величини X не менша маси $P\{U=0\}$ у нулі розподілу випадкової величини U. Це випливає з рівностей

$$P\{X=0\}=P\{\max\{0,U-d\}=0\}=P\{U-d\le 0\}=P\{U\le d\}=$$
$$=P\left(\{U=0\}\cup\{0<U\le d\}\right)=P\{U=0\}+P\{0<U\le d\}.$$

Установимо співвідношення між функцією розподілу $F_Y(x)$ величини Y дійсно поданого позову та функцією розподілу $F_Z(x)$ дійсно зазнаних витрат. Скористаємося тим, що

$$F_Y(x)=\begin{cases} P\{X<x|X>0\}, & \text{якщо } x>0;\\ 0, & \text{якщо } x\le 0\end{cases}$$

і $X=(U-d)^+$. Маємо

$$F_Y(x)=P\{X<x|X>0\}=P\{(U-d)^+<x|(U-d)^+>0\}=$$
$$=\frac{P\{(U-d)^+<x,(U-d)^+>0\}}{P\{(U-d)^+>0\}}=\frac{P\{0<(U-d)^+<x\}}{P\{(U-d)^+>0\}}=$$
$$=\frac{P\{0<U-d<x\}}{P\{U-d>0\}}=\frac{P\{d<U<d+x\}}{P\{U>d\}}=$$
$$=\frac{P\{d<U<d+x,U>0\}}{P\{U>d,U>0\}}=$$
$$=\frac{P\{d<U<d+x,U>0\}/P\{U>0\}}{P\{U>d,U>0\}/P\{U>0\}}=$$
$$=\frac{P(\{d<U<d+x\}|\{U>0\})}{P(\{U>d\}|\{U>0\})}=\frac{P\{d<Z<x+d\}}{P\{Z>d\}}=$$
$$=\frac{P\{Z<x+d\}-P\{Z\le d\}}{1-P\{Z\le d\}}.$$

Так що

$$F_Y(x)=\frac{P\{Z<x+d\}-P\{Z\le d\}}{1-P\{Z\le d\}}.$$

Якщо випадкова величина Z абсолютно неперервна зі щільністю f_Z, то $\frac{d}{dx}F_Z(x)=f_Z(x)$. А отже,

$$F_Y(x)=\frac{P\{Z<x+d\}-P\{Z<d\}}{1-P\{Z<d\}}=\frac{F_Z(x+d)-F_Z(d)}{1-F_Z(d)},$$

і звідси

$$f_Y(x)=\frac{d}{dx}F_Y(x)=\frac{f_Z(x+d)}{1-F_Z(d)}.$$

Приклад 1.6.1. *Імовірність потрапити в дорожньо-транспортну пригоду протягом деякого інтервалу часу дорівнює $P\{J=1\}=0,1$. Величина втрат (збитків) після аварії Z має розподіл Парето з нульовою точкою з параметрами $\alpha=3,\lambda=1000$. Страхова компанія встановила франшизу $d=100$.*

Обчислити ймовірність подання позову $P\{X>0\}$ та розподіл величини дійсно поданого позову Y.

Спочатку обчислимо імовірність $P\{X=0\}$ неприйняття позову страховою компанією:

$$P\{X=0\}=P\{U=0\}+P\{0<U\le d\}=$$
$$=P\{U=0\}+P\{0<U\le d|U>0\}P\{U>0\}=$$
$$=P\{J=0\}+P\{Z\le d\}P\{J=1\}=$$
$$=P\{J=0\}+P\{Z\le d\}(1-P\{J=0\}).$$

Тоді ймовірність подання позову

$$P\{X>0\}=1-P\{X=0\}=$$
$$=1-(P\{J=0\}+P\{Z\le d\}(1-P\{J=0\}))=$$
$$=(1-P\{J=0\})(1-P\{Z\le d\})=P\{J=1\}(1-F_Z(d))=$$
$$=0,1\left(1-\left(1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+d}\right)^{\alpha}\right)\right)=0,1\left(\frac{1000}{1000+100}\right)^3=0,075.$$

Щільність розподілу величини дійсно поданого позову Y дорівнює

$$f_Y(x)=\frac{f_Z(x+d)}{1-F_Z(d)}=\frac{\frac{\alpha}{\lambda}\left(\lambda/(\lambda+x+d)\right)^{\alpha+1}}{1-(1-(\lambda/(\lambda+d))^{\alpha})}=$$
$$=\frac{3}{1100}\left(\frac{1100}{1100+x}\right)^4.$$

Дійсно поданий позов має розподіл Парето з нульовою точкою з параметрами $\alpha=3$ і $\lambda=1100$.

2. Обмеження виплати за позовом. Друга умова, яку страхові компанії, як правило, включають у договори страхування, полягає в обмеженні виплати за позовом, а саме втрати клієнта відшкодовуються тільки до певної суми L. Інакше кажучи, якщо втрати клієнта менше L, то компанія відшкодовує їх у повному обсязі, якщо ж втрати перевищують рівень L, компанія відшкодовує тільки суму L. Цю умову формально можна записати так:

$$X = \begin{cases} U, & \text{якщо } U \le L; \\ L, & \text{якщо } U > L, \end{cases}$$

або

$$X = \min\{U, L\}.$$

Зазначимо, що за таких умов настання страхового випадку рівносильне поданню позову.

Рис. 1.6.2. Залежність позову Y від втрат Z

У разі настання страхового випадку величина дійсно поданого позову Y пов'язана з величиною дійсно зазнаних втрат Z так:

$$Y = \min\{Z, L\}$$

(див. рис. 1.6.2). Подамо функцію розподілу Y через функцію розподілу Z. Одержимо

$$P\{Y < x\} = P\{\min\{Z, L\} < x\} =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{якщо } x > L; \\ P\{Z < x\}, & \text{якщо } x \le L, \end{cases}$$

тобто

$$F_Y(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x > L; \\ F_Z(x), & \text{якщо } x \le L. \end{cases}$$

Звідси випливає, що розподіл випадкової величини Y завжди має в точці L атом із масою $1 - P\{Z < L\} = P\{Z \ge L\}$.

Приклад 1.6.2. *Величина втрат (збитків) Z у разі пожежі (за умов, що вона відбулася) має експоненціальний розподіл із середнім $1/\lambda$. Страхова компанія встановила верхню границю своєї відповідальності L.*

Обчислити середнє значення MY величини Y дійсно поданого позову.

Розв'язання. Оскільки випадкова величина Y має розподіл змішаного типу з атомом у точці L і $Y = Z$ для $Z < L$, то

$$MY = LP\{Z \ge L\} + \int_0^L x\lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Очевидно,

$$P\{Z \ge L\} = 1 - F_Z(L) = 1 - (1 - e^{-\lambda L}) = e^{-\lambda L},$$

$$\int_0^L x\lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^L xd\left(-e^{-\lambda x}\right) dx = -Le^{-\lambda L} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda L} + \frac{1}{\lambda}.$$

Тому

$$MY = LP\{Z \ge L\} + \int_0^L x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda L}\right).$$

Приклад 1.6.3. *Імовірність потрапити в дорожньо-транспортну пригоду протягом деякого інтервалу часу дорівнює $0,15$. Величина втрат Z за умов, що пригода відбулася, має розподіл зі щільністю $c(1 - x/2000)$, якщо $0 \le x < 2\,000$ і $P\{Z = 2\,000\} = 0,1$ (c — константа). Страхова компанія встановила верхню границю своєї відповідальності $L = 2\,000$ грн. Обчислити функцію розподілу величини Y дійсно поданого позову, функцію розподілу величини $X = IY$ індивідуального позову, MY, DY, MX, DX.*

Р о з в ' я з а н н я . У разі дорожньо-транспортної пригоди величина дійсно поданого позову Y пов'язана з величиною дійсно зазнаних втрат Z так: $Y = \min\{Z, L\}$, при цьому

$$F_Y(x) = \begin{cases} F_Z(x), & \text{якщо} \quad x \le L, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > L, \end{cases}$$

або

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 0, \\ 1\,000k\left(1 - \left(1 - \dfrac{x}{2\,000}\right)^2\right), & \text{якщо} \quad 0 < x \le 2\,000, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 2\,000. \end{cases}$$

Коефіцієнт k знайдемо виходячи з того, що для $x = 2\,000$

$$1\,000k\left(1 - \left(1 - \frac{x}{2\,000}\right)^2\right) + P\{Z = 2\,000\} = 1.$$

Звідси $k = 9 \cdot 10^{-4}$.

Функцію розподілу величини $X = IY$ знайдемо за допомогою формули повної ймовірності, розглянувши за повну групу подій події $\{I = 0\}$, $\{I = 1\}$:

$$F_X(x) = P\{X < x\} = P\{IY < x\} =$$

$$= P\{IY < x | I = 0\}P\{I = 0\} + P\{IY < x | I = 1\}P\{I = 1\}.$$

Звідси

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0,85 + 0,135\left(1 - \left(1 - \dfrac{x}{2000}\right)^2\right) & 0 < x \le 2000, \\ 1, & x > 2000. \end{cases}$$

Розподіл індивідуального позову X складається з дискретної частини: $P\{X = 0\} = 0,85$, $P\{X = 2000\} = 0,015$ та неперервної — щільність $f_X(x) = 0,000135(1 - x/2000)$ для $0 < x < 2000$. Тому

$$MX = 0P\{X = 0\} + 2\,000P\{X = 2\,000\} + \int_0^{2000} x f_X(x)dx = 120,$$

$$MX^2 = 0^2P\{X = 0\} + 2000^2P\{X = 2\,000\} + \int_0^{2000} x^2 f_X(x)dx = 15 \cdot 10^4,$$

$$DX = MX^2 - (MX)^2 = 135\,600.$$

Розподіл величини Y дійсно поданого позову складається також з двох частин.

Неперервна задається щільністю

$$f_Y(x) = F_Y'(x) = 0,0009(1 - x/2000), \quad 0 < x < 2\,000,$$

дискретна — $P\{Y = 2\,000\} = 0,1$. Тому

$$MY = 2000P\{Y = 2000\} + \int_0^{2000} x f_Y(x)dx = 800,$$

$$MY^2 = 2000^2P\{Y = 2000\} + \int_0^{2000} x^2 f_Y(x)dx = 10^6,$$

$$DY = MY^2 - (MY)^2 = 360\,000.$$

Розподіл величини Y дійсно поданого позову — змішаний розподіл зі щільністю $f_Y(x) = 0,0009(1 - x/2000)$, $0 < x < 2\,000$ та атомом з масою 0,1 у точці 2 000.

Приклад 1.6.4. *Величина дійсно поданого позову Y для певного виду нещасних випадків є випадковою величиною з генератрисою нормованих моментів*

$$\psi(z) = \frac{1}{(1 - 2500z)^4}, \ z < \frac{1}{2500}.$$

Обчислити середнє значення та дисперсію величини Y.

Р о з в ' я з а н н я. Генератриса нормованих моментів $\psi(z)$ визначається як

$$\psi(z) = Me^{zY} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{MY^k}{k!} z^k.$$

Розкладаємо функцію $\psi(z) = 1/(1-2500z)^4$ у ряд за степенями z:

$$\psi(z) = \frac{1}{(1-2\,500z)^4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4)(-5)\dots(-k-3)}{k!}(-2\,500)^k z^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\cdot 5\cdot \ldots \cdot (k+3)}{k!}(2\,500)^k z^k.$$

Звідси маємо $MY^k = 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot (k+3)\cdot 2\,500^k$, зокрема, $MY = 10\,000$, $MY^2 = 4\cdot 5\cdot 2\,500^2 = 125\cdot 10^6$, $DY = MY^2 - (MY)^2 = 25\cdot 10^6$.

1.7. Рандомізація

Рандомізація є невід'ємною складовою частиною опису індивідуальних позовів портфеля договорів як єдиного цілого.

Спочатку розглянемо приклад.

Нехай є портфель із N договорами страхування життя на один рік. Візьмемо величину страхової виплати за одиницю вимірювання. Тоді індивідуальний позов X_i за i-м договором страхування набуває двох значень: 0 і 1 відповідно з імовірностями $p = P\{X_i = 0\}$ і $q = P\{X_i = 1\}$. Тобто розподілом випадкової величини X_i $(i = 1, 2, \dots, N)$ є

$$P\{X_i = k\} = p^{1-k} q^k, \;\; k = 0, 1.$$

Припущення про те, що параметр q цього розподілу один і той самий для всіх договорів, еквівалентне статистичній однорідності портфеля, на що сподіватися не варто. У нашому прикладі ймовірність позову q залежить від віку x застрахованого:

$$q = q_x,$$

і тому, природно, змінюється від одного договору до іншого.

Розіб'ємо портфель на групи договорів згідно з віком застрахованих. Нехай N_x — число договорів, власникам яких x років, $\alpha_x = N_x/N$ — частка договорів з клієнтами у віці x років. Якщо ми цікавимося індивідуальними позовами портфеля, то це означає, що необхідно розглядати навмання вибраний договір. У зв'язку з цим імовірність позову q за даним договором

є випадковою величиною, яка набуває конкретного значення q_x для клієнтів віком x. Як ймовірність того, що клієнт має вік x, природно розглядати $\alpha_x = N_x/N$.

Якщо позначити через A подію "позов надійшов", через B_x — "вік клієнта дорівнює x", то за формулою повної ймовірності матимемо

$$P(A) = \sum_x P(A|B_x)P(B_x) = \sum_x q_x \alpha_x.$$

Вираз у правій частині останньої рівності можна розглядати як математичне сподівання функції q від випадкової величини x (віку застрахованого), яка набуває значення q_x із імовірністю α_x.

Узагальнимо описану процедуру. Нехай функція розподілу $F(x,\theta)$ величини позову Y залежить від деякого параметра θ (інакше кажучи, маємо сім'ю функцій розподілу, які залежать від параметра θ). За заданого значення y параметра θ функція розподілу $F(x,y)$ повністю визначена. Параметр θ є випадковою величиною з розподілом G. Тоді як розподіл F величини позову Y природно розглядати розподіл з функцією розподілу

$$F(x) = \int_{R^1} F(x,y)G(dy) = MF(x,\theta). \tag{1.7.1}$$

Розподіл (1.7.1) називають *сумішшю розподілів* $F(x,\theta)$, а процес знаходження розподілу F — *рандомізацією.*

Якщо розподіл G абсолютно неперервний зі щільністю $g(y)$, то функція розподілу $F(x)$ позову Y дорівнює

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^1} F(x,y)g(y)dy. \tag{1.7.2}$$

Якщо при кожному фіксованому y розподіл $F(x,y)$ абсолютно неперервний зі щільністю $f(x,y)$, то суміш $F(x) = \int_{\mathbb{R}^1} F(x,y)g(y)dy$ абсолютно неперервна зі щільністю

$$f(x) = \int_{R^1} f(x,y)g(y)dy. \tag{1.7.3}$$

Якщо розподіл G дискретний ($G : y_k \to G(\{y_k\}) > 0$, $k = 1, 2, \ldots$; $\sum\limits_{y_k} G(\{y_k\}) = 1$), то суміш $F(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} F(x, y) G(dy)$ має щільність

$$f(x) = \sum_{y_k} f(x, y_k) G(\{y_k\}). \tag{1.7.4}$$

Операція рандомізації дозволяє врахувати неоднорідність портфеля договорів і запропонувати розподіли, які адекватно описують реальні статистичні дані.

Рандомізований показниковий розподіл. Нехай величина Y дійсно поданого позову має показниковий розподіл з параметром θ:

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}, & \text{якщо } x \geq 0, \\ 0, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Параметр θ набуває значень з множини $(0; +\infty)$. Будемо вважати його гамма-розподіленим із параметрами $(\lambda; \alpha)$. Щільність розподілу дійсно поданого позову знаходимо як суміш показникових розподілів:

$$f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} f(x, y) g(y) dy = \int\limits_0^{+\infty} y e^{-yx} \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} y^{\lambda - 1} e^{-\alpha y} dy.$$

Після заміни $t = (x + \alpha) y$ маємо

$$f(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{t}{x + \alpha} \right)^\lambda e^{-t} \frac{1}{x + \alpha} dt =$$

$$= \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \frac{1}{(x + \alpha)^{\lambda + 1}} \int\limits_0^{+\infty} t^\lambda e^{-t} dt = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \frac{1}{(x + \alpha)^{\lambda + 1}} \Gamma(\lambda + 1) =$$

$$= \frac{\alpha^\lambda \lambda}{(x + \alpha)^{\lambda + 1}} = \frac{\lambda}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{x + \alpha} \right)^{\lambda + 1}, \quad x \geq 0.$$

Це щільність розподілу Парето з нульовою точкою з параметрами $(\lambda; \alpha)$. Тому розподіл Парето з нульовою точкою можна розглядати як показниковий розподіл з випадковим параметром, який має гамма-розподіл.

Сума випадкового числа доданків. Нехай величини $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ дійсно поданих позовів — незалежні випадкові величини, показниково розподілені з параметром θ:

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}, & \text{якщо } x \geq 0, \\ 0, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Параметр θ набуває значень із множини $(0; +\infty)$. Випадкова величина $S_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$ як сума незалежних показниково розподілених випадкових величин з параметром θ має гамма-розподіл з параметрами $(n; \theta)$:

$$f_{S_n}(x, \theta) = \begin{cases} \dfrac{\theta^n}{(n - 1)!} x^{n - 1} e^{-\theta x}, & \text{якщо } x \geq 0, \\ 0, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Число доданків n є параметром, який ми рандомізуємо за допомогою геометричного розподілу з параметром p:

$$P\{n = k\} = (1 - p)^{k - 1} p, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Щільність розподілу суми дійсно поданих позовів знаходимо як суміш щільностей $f_{S_n}(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^k}{(k - 1)!} x^{k - 1} e^{-\theta x} (1 - p)^{k - 1} p =$$

$$= p\theta e^{-\theta x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((1 - p)\theta x)^{k - 1}}{(k - 1)!} = p\theta e^{-p\theta x}, \quad x \geq 0,$$

$f(x) = 0$ для $x < 0$. Тобто $f(x)$ є щільністю показникового розподілу з параметром $p\theta$.

Рандомізований пуассонів розподіл. Нехай величина X індивідуального позову за договором має пуассонів розподіл з параметром λ:

$$p_k(\lambda) = P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Параметр λ набуває значень із множини $(0; +\infty)$. Будемо вважати його показниково розподіленим з параметром θ. Розподіл індивідуального позову за договором знаходимо як суміш розподілів $p_k(\lambda)$ [див. рівність (1.7.1)]:

$$q_k = \int_0^{+\infty} p_k(y) f(y,\theta) dy = \int_0^{+\infty} \frac{y^k}{k!} e^{-y} \theta e^{-\theta y} dy =$$

$$= \frac{\theta}{k!} \int_0^{+\infty} y^k e^{-(\theta+1)y} dy.$$

Після заміни $t = (\theta+1)y$ маємо

$$q_k = \frac{\theta}{k!(\theta+1)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{\theta+1}\right)^k e^{-t} dt =$$

$$= \frac{\theta}{k!(\theta+1)^{k+1}} \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = \frac{\theta}{k!(\theta+1)^{k+1}} \Gamma(k+1) =$$

$$= \frac{\theta}{(\theta+1)^{k+1}} = \frac{\theta}{\theta+1} \left(\frac{1}{\theta+1}\right)^k = \frac{\theta}{\theta+1} \left(1 - \frac{\theta}{\theta+1}\right)^k.$$

Розподіл $q_k = \dfrac{\theta}{\theta+1}\left(1 - \dfrac{\theta}{\theta+1}\right)^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ є геометричним розподілом з параметром $\theta/(\theta+1)$.

1.8. Задачі

1.1. Обчислити середнє значення і дисперсію індивідуального позову в разі страхування життя на один рік. Величина страхової виплати $b = 100\,000$ грн, ймовірність смерті застрахованого протягом року $q = 0,0025$.

1.2. Обчислити середнє значення та дисперсію індивідуального позову в разі страхування життя на один рік. Величина страхової виплати у випадку смерті від нещасного випадку дорівнює 500 000 грн (імовірність цієї події 0,0005), а у випадку смерті внаслідок природних причин — 100 000 грн (імовірність цієї події 0,002).

1.3. Розподіл величини дійсно поданого позову Y для договорів страхування автомобілів дорівнює

20	30	40	50	60	70	80
0,15	0,10	0,05	0,20	0,10	0,10	0,30

Обчислити ймовірність $P\{|Y - MY| < \sqrt{DY}\}$ того, що величина дійсно поданого позову Y відрізняється від свого середнього менше, ніж на одне стандартне відхилення.

1.4. Імовірність виникнення пожежі в деякому будинку протягом заданого проміжку часу становить 0,02. Якщо пожежа виникає, то величина пошкодження Y, завданого будинку, рівномірно розподілена на інтервалі від 0 до її максимально можливого значення a. Обчислити математичне сподівання і дисперсію величини пошкодження X, завданого пожежею будинку протягом заданого проміжку часу.

1.5. Імовірність пожежі на застрахованому об'єкті вартістю 6 млн грн дорівнює $q = 10^{-4}$. У разі пожежі збитки Y рівномірно розподілені від 0 до повної вартості об'єкта. Обчислити середнє значення і дисперсію позову X.

1.6. Величину індивідуального позову X за договором страхування можна подати у вигляді $X = IY$, де I — індикатор події "відбувся страховий випадок", Y — величина дійсно поданого позову. Відомо, що $MX = 2$, $DY = 16$, $DX = 30$. Обчислити ймовірність $P\{I = 1\}$ настання страхового випадку та середню величину дійсно поданого позову.

1.7. Розподіл величини індивідуального позову X для договорів страхування складу від пожеж дорівнює

0	500	1000	10000	50000	100000
0,9	0,06	0,03	0,008	0,001	0,001

Знайти розподіли величин I та Y. Обчислити середню величину дійсно поданого позову.

1.8. Знайти розподіли, яким відповідають такі генератриси:

а) $\frac{1}{4}(1+z)^2$;

б) $p(1-qz)^{-1}$, $\quad p, q > 0$, $p + q = 1$;

в) $e^{\lambda(z-1)}$, $\lambda > 0$;

г) $(p+qz)^n$;

д) $\left(1 + \dfrac{1-z}{z}\ln(1-z)\right)$.

1.9. Статистичний аналіз даних величин дійсно поданих позовів за портфелем договорів дає підстави стверджувати, що коли Y — величина дійсно поданого позову, то величина $Z = \ln Y$ має нормальний розподіл із середнім 6,012 та дисперсією 1,792. Обчислити ймовірність того, що величина дійсно поданого позову Y знаходиться в межах від 200 до 500.

1.10. Щомісячні виплати страхової компанії описуються неперервною додатною випадковою величиною Y зі щільністю $C(1+x)^{-4}, x > 0$. Обчислити середні виплати компанії за один місяць.

1.11. Договір групового страхування покриває медичні витрати співробітників деякої компанії. Сумарні річні виплати страхової компанії задаються формулою $Z = 100\,000Y$, де Y — випадкова величина зі щільністю

$$f(x) = k(1-x)^4, \;\; 0 < x < 1; \quad f(x) = 0, \;\; x \notin (0;1).$$

Обчислити ймовірність того, що сумарні річні виплати страхової компанії Z перевищують $40\,000$, якщо відомо, що $Z > 10\,000$.

1.12. Збитки від можливої пожежі в крамниці задаються випадковою величиною Y зі щільністю

$$f(x) = \begin{cases} 0,005(20-x), & \text{якщо } x \in (0;20); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0;20). \end{cases}$$

Обчислити ймовірність того, що величина дійсно поданого позову Y більше 16, якщо відомо, що вона більше 8.

1.13. Час T від моменту придбання обладнання до моменту його відмови (виходу з ладу) має експоненціальний розподіл із середнім 10 років. Власник обладнання вирішив застрахувати його на випадок передчасної відмови. Згідно з умовою договору страхування страхова компанія виплачує страхову суму x у випадку відмови обладнання протягом першого року експлуатації, $x/2$ — у випадку відмови протягом другого або третього року експлуатації і не платить нічого, якщо обладнання працює без відмови три роки. Відомо, що середня величина індивідуального позову до компанії $MX = 1000$. Знайти розмір страхової суми x.

1.14. У невеликому приморському містечку річні втрати від штормів, пожеж та розкрадання майна є незалежними експоненційно розподіленими випадковими величинами із середніми 1; 1,5 та 2,4 відповідно. Обчислити ймовірність того, що максимальна величина із зазначених збитків перевищує 3.

1.15. Величина збитків, спричинених мешканцям житлових будинків ураганом, описується випадковою величиною зі щільністю

$$f(x) = \begin{cases} 3/x^4, & \text{якщо } x > 1; \\ 0, & \text{якщо } x \le 1. \end{cases}$$

До страхової компанії було подано три позови. Обчислити середнє значення найбільшого з них.

1.16. Нехай $Y_1, Y_2, \ldots$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, $F(x)$ — функція розподілу Y_i, $i = 1, 2, \ldots$ Нехай ν — цілочислова невід'ємна випадкова величина, яка не залежить від $Y_1, Y_2, \ldots$ і має генератрису $g(z)$. Обчислити функцію розподілу випадкових величин $\max\{Y_1, \ldots, Y_\nu\}$, $\min\{Y_1, \ldots, Y_\nu\}$.

1.17. Нехай $Y_1, Y_2, \ldots$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, ν — цілочислова невід'ємна випадкова величина, яка не залежить від $Y_1, Y_2, \ldots$ Позначимо через $g(z)$ генератрису Y_i, а через $\pi(z)$ — генератрису ν. Обчислити генератрису випадкової величини $Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu$.

1.18. Нехай Y — невід'ємна випадкова величина, $\varphi(s)$ — її перетворення Лапласа. Знайти перетворення Лапласа випадкової величини $aY + b$ $(a, b \ge 0)$.

1.19. Нехай $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots$ — перетворення Лапласа ймовірнісних розподілів $F_1, F_2, \ldots$; $a_1, a_2, \ldots$ — невід'ємні числа такі, що $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = 1$. Довести, що функція

$$\varphi(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(s)$$

є перетворенням Лапласа деякого ймовірнісного розподілу.

1.20. Нехай $Y_1, Y_2, \ldots$ — послідовність незалежних однаково розподілених невід'ємних випадкових величин, ν — цілочислова невід'ємна випадкова величина, яка не залежить від $Y_1, Y_2, \ldots$. Позначимо через $\varphi(s)$ перетворення Лапласа Y_i, а через $\pi(z)$ генератрису ν. Обчислити перетворення Лапласа випадкової величини $Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu$.

1.21. Знайти розподіли, яким відповідають такі перетворення Лапласа: а) $\varphi(s) = e^{-as}$; б) $\varphi(s) = \dfrac{\lambda}{\lambda + s}, \lambda > 0$;
в) $\varphi(s) = \dfrac{\beta^\alpha}{(\beta + s)^\alpha}, \alpha > 0, \beta > 0$;
г) $\varphi(s) = \exp\{-\lambda(1 - e^{-s})\}, \lambda > 0$;
д) $\varphi(s) = \dfrac{q}{1 - pe^{-s}},\; p + q = 1,\; p > 0,\; q > 0$.

1.22. Знайти перетворення Лапласа для таких розподілів:
а) атомічний розподіл, зосереджений у точці a;
б) розподіл Пуассона з параметром λ;
в) геометричний розподіл з параметром q.

1.23. Величина дійсно поданого позову Y для певного виду нещасних випадків є випадковою величиною з генератрисою нормованих моментів:

$$\varphi(z) = \frac{1}{(1-2z)^9},\ z < \frac{1}{2}.$$

Обчислити середнє значення та дисперсію величини Y.

1.24. Імовірність страхового випадку дорівнює 0,1. Величина дійсно поданого позову Y має зрізаний показниковий розподіл з параметром λ:

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & 0 < x \le L, \\ 1, & x > L. \end{cases}$$

Обчислити функцію розподілу величини $X = IY$ індивідуального позову, середнє та дисперсію величин X та Y.

1.25. Для покриття втрат Z клієнта, рівномірно розподілених на відрізку [0; 1000], укладається договір страхування, згідно з яким клієнт самостійно покриває втрати до певної межі d, а решту $(Z - d)$ сплачує страхова компанія. Визначити, на якому рівні необхідно встановити межу d, щоб середня важкість страхового випадку знизилася в 4 рази.

1.26. Імовірність потрапити в дорожньо-транспортну пригоду протягом деякого інтервалу часу дорівнює $P\{I = 1\} = 0,1$. Величина втрат (збитків) після аварії Z має експоненціальний розподіл із середнім 3 000 грн. Страхова компанія встановила франшизу d=600 грн. Обчислити ймовірність подання позову $P\{X > 0\}$ та розподіл величини дійсно поданого позову Y.

1.27. Страхова компанія укладає договори страхування автомобілів на один рік. Імовірність потрапити в дорожньо-транспортну пригоду дорівнює $P\{I = 1\} = 0,05$ (протягом дії договору можливий лише один страховий випадок). Страхова компанія встановила франшизу $d = 2$. Величина дійсно зазнаних втрат Z клієнтом після настання страхового випадку має розподіл

$$P\{Z = n\} = \frac{K}{n}, \quad n = 1, \ldots, 5,$$

де K — деяка константа. Обчислити середні величини дійсно поданого позову Y та індивідуального позову X до страхової компанії.

1.28. Власник автомобіля застрахував його на випадок пошкодження в разі аварії. Страхова компанія встановила франшизу $d = 250$. Обчислити середнє значення та стандартне відхилення величини дійсно поданого позову Y, якщо вартість ремонту автомобіля після аварії Z рівномірно розподілена на відрізку [0;1500].

1.29. Страхова компанія відшкодовує стоматологічні видатки Z до максимального рівня $L = 250$. Щільність випадкової величини Z дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} c\exp\{-0,004x\}, & \text{якщо } x \ge 0; \\ 0, & \text{якщо } x < 0, \end{cases}$$

де c — деяка константа. Обчислити медіану розподілу величини дійсно поданого позову Y.

1.30. Розподіл тяжкості Z страхового випадку за договорами страхування цивільної відповідальності автотранспортних засобів має функцію розподілу

$$F(x) = 1 - 0,8\exp\{-0,02x\} - 0,2\exp\{-0,001x\}, \quad x \ge 0.$$

Відповідальність страхової компанії щодо відшкодування збитків обмежена сумою $L = 1000$ за кожним страховим випадком. Обчислити середню величину Y дійсно поданого позову за одним страховим випадком.

1.31. За договором групового страхування страхова компанія зобов'язана сплатити 100 відсотків усіх медичних витрат співробітників деякої компанії, але в сумі не більше 1 млн доларів за один рік.

Загальна сума річних медичних витрат Z (у млн доларів) є випадковою величиною зі щільністю

$$f(x) = \begin{cases} x(4-x)/9, & \text{якщо } 0 < x < 3; \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0;3). \end{cases}$$

Обчислити очікувані виплати страхової компанії за даним договором.

1.32. Нехай величина X індивідуального позову за договором має пуассонів розподіл з параметром $\lambda, \lambda \in (0, +\infty)$. Будемо вважати, що λ має гамма-розподіл з параметрами α, β. Обчислити розподіл індивідуального позову за договором як суміш пуассонових розподілів.

Розділ 2

Моделі процесу позовів

2.1. Статична модель для числа позовів за фіксований проміжок часу

Найпростіша модель надходження позовів будується за таких припущень.

1) Інтервал часу фіксований.

2) Кількість договорів N — фіксована.

3) Кожен договір може породжувати не більше одного позову (договір може й не призводити до позову).

4) Позови, пов'язані з різними договорами — незалежні події (у теоретико-ймовірнісному сенсі).

5) Імовірність p подання позову (імовірність "успіху") за кожним договором одна й та сама.

За припущень 1–5 загальне число позовів ν має біномний розподіл з параметрами $(N; p)$:

$$P\{\nu = i\} = C_N^i\, p^i (1-p)^{N-i}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

Для ν як для біномно розподіленої випадкової величини з параметрами $(N; p)$

$$M\nu = Np,$$

$$D\nu = Np(1-p).$$

Теорема 2.1.1. (найімовірніше число позовів). *Якщо $(N+1)p$ — не ціле число, то*

$$P_N(i) = C_N^i p^i (1-p)^{N-i}$$

досягає найбільшого значення в точці $m = [(N+1)p]$, монотонно зростаючи при $i < m$ і монотонно спадаючи при $i > m$. Якщо $(N+1)p$ — ціле число, то $P_N(i)$ досягає максимального значення в точках $m = (N+1)p$ і $m-1$ ($P_N(m-1) = P_N(m)$), монотонно зростаючи при $i < m-1$ і монотонно спадаючи при $i > m$.

Доведення.

$$\frac{P_N(i)}{P_N(i-1)} = \frac{C_N^i p^i (1-p)^{N-i}}{C_N^{i-1} p^{i-1} (1-p)^{N-(i-1)}} = \frac{(N-i+1)p}{i(1-p)} =$$

$$= \frac{(N+1)p - ip}{i(1-p)} = 1 + \frac{(N+1)p - i}{i(1-p)}.$$

Тому якщо $i < (N+1)p$, то $P_N(i)/P_N(i-1) > 1$ (зі зростанням i ймовірність $P_N(i)$ зростає); якщо ж $i > (N+1)p$, то $P_N(i)/P_N(i-1) < 1$ (зі зростанням i ймовірності $P_N(i)$ спадають). Звідси маємо: якщо $(N+1)p$ — не ціле число, а $m = [(N+1)p]$ — найбільше ціле, що не перевищує $(N+1)p$, то $P_N(i)$ набуває найбільшого значення при $m = [(N+1)p]$. Якщо ж $(N+1)p$ — ціле число, то найімовірніших значень два: $m = (N+1)p$ і $m-1$, причому $P_N(m-1) = P_N(m)$.

Теорема доведена.

Якщо за припущень 1–5 число договорів N велике, а ймовірність p подання позову, породженого одним договором, мала, то як розподіл числа позовів розглядатимемо пуассонів розподіл з параметром $\lambda = Np$:

$$P\{\nu = i\} = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda},\ i = 0, 1, 2, \ldots$$

Це випливає з теореми Пуассона.

Теорема 2.1.2. (теорема Пуассона). *Нехай $Np \to \lambda > 0$ при $N \to \infty$. Тоді для кожного фіксованого i ($i = 0, 1, \ldots$)*

$$\lim_{N\to\infty} C_N^i\, p^i (1-p)^{N-i} = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}.$$

Приклад 2.1.1. *Страхова компанія встановила тариф за деяким видом ризику виходячи з припущення, що ймовірність* *подання позову дорівнює* $0,01$ (*протягом року*), *а середня тяжкість страхового випадку дорівнює* 980$. *Компанія уклала* 1000 *договорів страхування такого ризику. Через рік виявилося, що за цим портфелем договорів надійшло* 15 *позовів, а середня величина дійсно поданого позову дорівнює* $989,7$\$. *У той час, як реальна середня величина дійсно поданого позову достатньо відповідає вихідному припущенню, реальне число поданих позовів на* 50 *відсотків перевищує очікуване число* ($1000 \cdot 0,01 = 10$ *позовів*). *Визначити, чи можна стверджувати, що актуарій компанії помилився, припустивши дуже низьку ймовірність подання позову, або ця розбіжність просто є наслідком несприятливого збігу обставин.*

Розв'язання. Припустимо, що ймовірність подання позову дійсно дорівнює $p = 0,01$. Тоді число позовів за портфелем з $N = 1000$ договорів має біномний розподіл з параметрами (N, p):

$$P\{\nu = i\} = C_N^i p^i (1-p)^{N-i}, \quad i = 0, 1, \ldots, N.$$

Оскільки число договорів $N = 1000$ достатньо велике, а ймовірність подання позову $p = 0,01$ мала, то середнє число позовів $M\nu = Np = 10$ є параметром λ пуассонового розподілу:

$$P\{\nu = i\} = \frac{10^i}{i!} e^{-10}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Тому ймовірність того, що число позовів ν перевищить своє середнє значення $M\nu = 10$ на 50 відсотків, дорівнює

$$P\{\nu \geq M\nu + 0,5M\nu\} = P\{\nu \geq 15\} = \sum_{i=15}^{+\infty} \frac{10^i}{i!} e^{-10} =$$

$$= 1 - \sum_{i=0}^{14} \frac{10^i}{i!} e^{-10} = 0,083,$$

тому розбіжність між реальним та очікуваним числом поданих позовів можна трактувати як несприятливий збіг обставин.

2.2. Процес Пуассона

Нехай у будь-який момент часу $t \in [0; +\infty)$ до страхової компанії може надійти позов. Будемо цікавитися числом позовів на інтервалі часу $[0; t)$, позначимо це число через $\nu(t)$ (ясно, що коли $t_1 < t_2$, то $\nu(t_1) \leq \nu(t_2)$).

У кожен момент часу $t \in [0; +\infty)$ $\nu(t)$ є випадковою величиною, а їх сукупність $\{\nu(t), \, t \in [0; +\infty)\}$ являє собою випадковий процес. Припустимо, що $\nu(t)$ задовольняє такі умови:

1) $\nu(0) = 0$.

2) Для довільних $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n$ випадкові величини

$$\nu(t_1) - \nu(t_0), \, \nu(t_2) - \nu(t_1), \, \ldots, \, \nu(t_n) - \nu(t_{n-1})$$

незалежні (процес $\{\nu(t), \, t \in [0; +\infty)\}$ є процесом із незалежними приростами).

3) Для довільних $t_1 < t_2$, $s > 0$ розподіли випадкових величин

$$\nu(t_2) - \nu(t_1) \text{ і } \nu(t_2 + s) - \nu(t_1 + s)$$

збігаються ($\{\nu(t), \, t \in [0; +\infty)\}$ є процесом зі стаціонарними приростами).

4) $P\{\nu(t+h) - \nu(t) > 1\} = o(h)$ при $h \to 0$
($\{\nu(t), \, t \in [0; +\infty)\}$ є ординарним процесом). Ординарність процесу означає практичну неможливість появи двох або більше подій (позовів) за малий проміжок часу.

Теорема 2.2.1. *Нехай* $\{\nu(t), \, t \in [0; +\infty)\}$ — *випадковий процес із незалежними стаціонарними приростами такий, що*

1) $P_{>1}(h) = P\{\nu(t+h) - \nu(t) > 1\} = o(h)$ *при* $h \to 0$,

2) $P\{\nu(t+h) - \nu(t) \geq 0\} = 1$ *при* $h > 0$.

Тоді

$$P\{\nu(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

де λ ($\lambda > 0$) — *деяка константа.*

Доведення. Нехай

$$P_k(t) = P\{\nu(s+t) - \nu(s) = k\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

тобто $P_k(t)$ — імовірність того, що на інтервалі завдовжки t відбудеться k подій. Спочатку встановимо, що ймовірність того, що на інтервалі довжиною h відбудеться точно одна подія, дорівнює

$$P_1(h) = \lambda h + o(h) \text{ при } h \to 0,$$

де λ $(\lambda > 0)$ — деяка константа.

Розглянемо інтервал часу $[0;1)$. Позначимо через $p = P_0(1)$ ймовірність того, що на інтервалі $[0;1)$ не відбулося жодної події. Розіб'ємо інтервал $[0;1)$ на n рівних неперетинних частин:

$$[0;1) = \bigcup_{i=0}^{n-1} \left[\frac{i}{n}; \frac{i+1}{n}\right).$$

Очевидно, що подію, яка полягає в тому, що на інтервалі $[0;1)$ не надійшло жодного позову, можна подати у вигляді

$$\{\nu(1) - \nu(0) = 0\} = \bigcap_{i=0}^{n-1} \left\{\nu\left(\frac{i+1}{n}\right) - \nu\left(\frac{i}{n}\right) = 0\right\}.$$

Оскільки прирости процесу незалежні і стаціонарні, то

$$p = P_0(1) = P\{\nu(1) - \nu(0) = 0\} =$$

$$= P\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} \left\{\nu\left(\frac{i+1}{n}\right) - \nu\left(\frac{i}{n}\right) = 0\right\}\right) =$$

$$= \prod_{i=0}^{n-1} P\left\{\nu\left(\frac{i+1}{n}\right) - \nu\left(\frac{i}{n}\right) = 0\right\} = \prod_{k=1}^{n} P\left\{\nu\left(\frac{1}{n}\right) - \nu(0) = 0\right\} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} P_0\left(\frac{1}{n}\right) = \left(P_0\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n.$$

Ймовірність того, що на $[0;\, 1/n)$ не надійшло жодного позову дорівнює

$$P_0\left(\frac{1}{n}\right) = p^{1/n}.$$

Подію, яка полягає в тому, що на інтервалі $[0;k/n)$ не надійшло жодного позову, можна подати у вигляді

$$\left\{\nu\left(\frac{k}{n}\right) - \nu(0) = 0\right\} = \bigcap_{i=0}^{k-1} \left\{\nu\left(\frac{i+1}{n}\right) - \nu\left(\frac{i}{n}\right) = 0\right\},$$

звідси ймовірність того, що на інтервалі $[0;k/n)$ не надійшло жодного позову

$$P_0\left(\frac{k}{n}\right) = P\left\{\nu\left(\frac{k}{n}\right) - \nu(0) = 0\right\} = \left(P_0\left(\frac{1}{n}\right)\right)^k = p^{k/n}.$$

Імовірність $P_0(h) = p^h$ того, що на інтервалі $[0;h)$ не надійшло жодного позову, як імовірність задовольняє нерівності $0 \le P_0(h) \le 1$, тому

$$0 \le p^h \le 1.$$

Останні нерівності для всіх $h > 0$ виконуються, коли

1) $p = 0$;
2) $p = 1$;
3) $0 < p < 1$.

Якщо $p = 0$, то $P_0(h) = 0$ при всіх h. Це означає, що на інтервалі $[0;h)$ (для будь-якого h) з імовірністю 1 відбудеться принаймні одна подія, а отже, і нескінченне число подій. У зв'язку з тим, що $p = 0$, $P_{>1}(h) = P\{\nu(h) > 1\}$ не є $o(h)$, коли $h \to 0$. Одержали протиріччя з припущенням про ординарність процесу, отже, $p \ne 0$.

Якщо $p = 1$, то $P_0(h) = 1$ для будь-якого h — тобто ймовірність того, що на $[0;\, h)$ надійде нуль позовів, дорівнює одиниці, або ймовірність того, що на $[0;\, h)$ надійде один або більше позовів, дорівнює нулю. Ця ситуація не є цікавою, оскільки вона описує вироджений процес. Розглянемо випадок, коли $0 < p < 1$. Подамо p у вигляді

$$p = e^{-\lambda},$$

тоді

$$P_0(h) = p^h = e^{-\lambda h}.$$

Очевидно, за будь-якого h має місце рівність

$$P_0(h) + P_1(h) + P_{>1}(h) = 1.$$

Тому, враховуючи ординарність $\{\nu(h),\ h \in [0; +\infty)\}$, маємо

$$P_1(h) = 1 - e^{-\lambda h} - o(h),$$

а отже, при $h \to 0$

$$P_1(h) = \lambda h + o(h).$$

Далі одержимо рівняння, яким задовольняють $P_{k+1}(t)$ при $k \geq 0$.

$$P_{k+1}(t+h) = P\{\nu(t+h) = k+1\} =$$

$$= P\left\{\bigcup_{i=0}^{k+1} (\{\nu(t) - \nu(0) = i\} \cap \{\nu(t+h) - \nu(t) = (k+1) - i\})\right\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k+1} P\left(\{\nu(t) - \nu(0) = i\} \cap \{\nu(t+h) - \nu(t) = (k+1) - i\}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k+1} P\{\nu(t) = i\} P\{\nu(t+h) - \nu(t) = (k+1) - i\} =$$

$$= P\{\nu(t) = k+1\} P\{\nu(t+h) - \nu(t) = 0\} +$$

$$+ P\{\nu(t) = k\} P\{\nu(t+h) - \nu(t) = 1\} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} P\{\nu(t) = i\} P\{\nu(t+h) - \nu(t) = (k+1) - i\}. \qquad (2.2.1)$$

Рівність (2.2.1), враховуючи, що при $h \to 0$

$$P_0(h) = P\{\nu(t+h) - \nu(t) = 0\} = 1 - \lambda h + o(h),$$

$$P_1(h) = P\{\nu(t+h) - \nu(t) = 1\} = \lambda h + o(h),$$

$$P_{>1}(h) = P\{\nu(t+h) - \nu(t) > 1\} = o(h),$$

запишемо в такому вигляді:

$$P_{k+1}(t+h) = P\{\nu(t) = k+1\}(1 - \lambda h + o(h)) +$$

$$+ P\{\nu(t) = k\}(\lambda h + o(h)) + \sum_{i=0}^{k-1} P\{\nu(t) = i\} o(h).$$

Отже, маємо

$$P_{k+1}(t+h) = (1 - \lambda h + o(h)) P_{k+1}(t) + (\lambda h + o(h)) P_k(t) + o(h),$$

або

$$P_{k+1}(t+h) - P_{k+1}(t) = -\lambda h P_{k+1}(t) + \lambda h P_k(t) + o(h).$$

Поділивши праву й ліву частини останньої рівності на h, при $h \to 0$ одержимо

$$\frac{dP_{k+1}(t)}{dt} = -\lambda P_{k+1}(t) + \lambda P_k(t), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2.2.2)$$

за початкових умов

$$P_0(0) = 1; \quad P_k(0) = P\{\nu(0) = k\} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Щоб розв'язати одержану систему рівнянь, розглянемо функції $Q_k(t)$:

$$Q_k(t) = e^{\lambda t} P_k(t), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Перепишемо систему (2.2.2) у термінах функцій $Q_k(t)$. Одержимо

$$\left(e^{-\lambda t} Q_{k+1}(t)\right)' = -\lambda e^{-\lambda t} Q_{k+1}(t) + \lambda e^{-\lambda t} Q_k(t),$$

$$-\lambda e^{-\lambda t} Q_{k+1}(t) + e^{-\lambda t} Q'_{k+1}(t) = -\lambda e^{-\lambda t} Q_{k+1}(t) + \lambda e^{-\lambda t} Q_k(t).$$

Звідси випливає

$$Q'_{k+1}(t) = \lambda Q_k(t), \quad k = 0, 1, \ldots \qquad (2.2.3)$$

(з $P_k(t) = e^{-\lambda t} Q_k(t)$ при $t = 0$ маємо $P_k(0) = Q_k(0)$, $k = 1, 2, \ldots$).

Розв'яжемо систему рівнянь (2.2.3), враховуючи, що

$$Q_k(0) = e^0 P_k(0) = 0,\ k = 1, 2, \ldots,$$

$$P_0(t) = e^{-\lambda t},$$

а отже,

$$Q_0(t) = e^{\lambda t} P_0(t) = e^{\lambda t} e^{-\lambda t} = 1.$$

$$Q'_1(t) = \lambda Q_0(t) = \lambda,$$

$$Q_1(t) = \lambda t,$$

$$Q_2'(t) = \lambda Q_1(t) = \lambda^2 t,$$

$$Q_2(t) = \frac{\lambda^2 t^2}{2}$$

і т.д.;

$$Q_k(t) = \frac{\lambda^k t^k}{k!}.$$

Враховуючи, що

$$P_k(t) = e^{-\lambda t} Q_k(t), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

одержимо

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Отже, при кожному t випадкова величина $\nu(t)$ має розподіл Пуассона з параметром λt (зокрема, середнє число позовів за інтервал часу t дорівнює λt). Зазначимо, що середнє число позовів за час t зростає пропорційно часу. Теорема доведена.

З доведеної теореми випливає низка наслідків.

Позначимо через t_i момент подання i-го позову, через τ_i — інтервал часу між моментами t_i і t_{i-1} подання i-го та $(i-1)$-го позовів.

Наслідок 1. *Інтервали τ_i між позовами мають показниковий розподіл з параметром λ.*

Доведення. Позначимо через A_t подію "за інтервал $[s; s+t)$, $s \geq 0$ не надійшло жодного позову":

$$A_t = \{\nu(t+s) - \nu(s) = 0\} = \{\tau_i > t\}.$$

Оскільки процес $\nu(t)$, $t \in [0; +\infty)$ має стаціонарні прирости, то $P(A_t)$ дорівнює ймовірності події B_t — "за інтервал $[0; t)$ не надійшло жодного позову":

$$B_t = \{\nu(t) - \nu(0) = 0\} = \{\nu(t) = 0\}.$$

Очевидно,

$$P\{\tau_i > t\} = P(A_t) = P(B_t) = P\{\nu(t) = 0\} = P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Отже,

$$P\{\tau_i < t\} = 1 - e^{-\lambda t},$$

тобто випадкова величина τ_i розподілена показниково з параметром λ.

Наслідок доведений.

Наслідок 2. *Імовірність подання позову за малий інтервал часу $(t, t+h)$ не залежить від надходження позовів до моменту t і дорівнює $\lambda h + o(h)$.*

Імовірність подання більше ніж одного позову за малий інтервал часу $(t, t+h)$ дорівнює $o(h)$.

Доведення. Оскільки процес має властивість відсутності післядії, то подання позовів на інтервалі $(t, t+h)$ не залежить від подання позовів до моменту t.

Імовірність подання одного позову на інтервалі $(t, t+h)$ дорівнює

$$P\{\nu(t+h) - \nu(t) = 1\} = \frac{(\lambda h)^1}{1!} e^{-\lambda h} =$$

$$= (\lambda h)(1 - \lambda h + o(h)) = \lambda h + o(h).$$

А ймовірність подання більше одного позову на інтервалі $(t, t+h)$ дорівнює

$$P\{\nu(t+h) - \nu(t) > 1\} = 1 - P\{\nu(t+h) - \nu(t) \leq 1\} =$$

$$= 1 - P\{\nu(t+h) - \nu(t) = 0\} + P\{\nu(t+h) - \nu(t) = 1\} =$$

$$= 1 - \left(\frac{(\lambda h)^0}{0!} e^{-\lambda h} + \frac{(\lambda h)^1}{1!} e^{-\lambda h} \right) = 1 - (1 + \lambda h) e^{-\lambda h} =$$

$$= 1 - (1 + \lambda h)(1 - \lambda h + o(h)) = o(h).$$

Наслідок доведений.

Наслідок 3. *Інтервали між надходженням позовів — незалежні випадкові величини.*

Наслідок 4. *Момент t_n надходження n-го позову має гамма-розподіл із параметрами $(n; \lambda)$, тобто щільність розподілу випадкової величини t_n задається формулою*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x \geq 0, \\ 0, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Доведення. Момент t_n надходження n-го позову можна подати у вигляді суми незалежних випадкових величин $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, кожна з яких має показниковий розподіл з параметром λ (або, що те ж саме, гамма-розподіл з параметрами $(1; \lambda)$). Тому $t_n = \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n$ як сума незалежних гамма-розподілених з параметрами $(1;\lambda)$ випадкових величин має гамма-розподіл з параметрами $(n;\lambda)$.

Наслідок доведений.

Наслідок 5. *Якщо на інтервалі* $[0;t)$ *поданий один позов, то момент його надходження* t_1 *розподілений рівномірно на* $[0;t)$.

Доведення. У термінах процесу $\nu(s), s\in[0;\infty)$ наявність одного позову на інтервалі $[0;t)$ означає, що $\nu(t)=1$. Знайдемо функцію розподілу випадкової величини t_1 — моменту надходження позову за умови $\nu(t)=1$. Нехай $0<u<t$. Враховуючи незалежність і стаціонарність приростів процесу, маємо

$$F(u)=P\{t_1<u|\nu(t)=1\}=\frac{P\{t_1<u,\nu(t)=1\}}{P\{\nu(t)=1\}}=$$

$$=\frac{P\{\nu(u)-\nu(0)=1,\nu(t)-\nu(u)=0\}}{P\{\nu(t)=1\}}=$$

$$=\frac{P\{\nu(u)-\nu(0)=1\}P\{\nu((t-u)+u)-\nu(u)=0\}}{P\{\nu(t)=1\}}=$$

$$=\frac{P\{\nu(u)-\nu(0)=1\}P\{\nu(t-u)-\nu(0)=0\}}{P\{\nu(t)=1\}}=$$

$$=\frac{P_1(u)P_0(t-u)}{P_1(t)}=\frac{\lambda ue^{-\lambda u}e^{-\lambda(t-u)}}{\lambda te^{-\lambda t}}=\frac{u}{t}.$$

А функція $F(u)=u/t,\ u\in[0;t)$ є функцією рівномірного розподілу на інтервалі $[0;t)$.

Наслідок доведений.

Приклад 2.2.1. *Страхова компанія має два портфелі* A *та* B *договорів страхування. Позови за портфелем* A *підпорядковуються пуассоновому процесу із середнім* 3 *позови за рік, а позови за портфелем* B *— пуассоновому процесу з середнім* 5 *позовів за рік. Ці два процеси — незалежні. Обчислити ймовірність того, що за портфелем* A 3 *позови надійдуть раніше, ніж* 3 *позови за портфелем* B.

Розв'язання. Розглянемо пуассонів процес із параметром λ і позначимо через t_n — момент надходження n-го позову. Як відомо, момент t_n надходження n-го позову має гамма-розподіл

із параметрами $(n;\lambda)$, тобто щільність розподілу випадкової величини t_n

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\lambda t}, & \text{якщо } t\ge 0,\\ 0, & \text{якщо } t<0.\end{cases}$$

Позначимо через t_A та t_B — моменти надходження третього позову за портфелями A та B відповідно. Момент t_A надходження третього позову за портфелем A має гамма-розподіл із параметрами $(3;3)$, момент t_B надходження третього позову за портфелем B має гамма-розподіл із параметрами $(3;5)$. Імовірність того, що за портфелем A три позови надійдуть раніше, ніж три позови за портфелем B, дорівнює

$$P\{t_A<t_B\}=P\{t_B-t_A>0\}=\int\limits_0^{+\infty}f_{t_B-t_A}(x)dx,$$

де щільність розподілу $f_{t_B-t_A}(x)$ випадкової величини t_B-t_A дорівнює

$$f_{t_B-t_A}(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_{t_B}(x+y)f_{t_A}(y)dy=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}f_{t_B}(x+y)\frac{27}{2}y^2e^{-3y}dy=$$

$$=\frac{27}{2}\int\limits_x^{+\infty}f_{t_B}(t)(t-x)^2e^{-3(t-x)}dt$$

(скористалися заміною змінної $x+y=t$). Обчисливши останній інтеграл для кожного значення $x\in R^1$, одержимо: якщо $x<0$, то

$$\frac{27}{2}\int\limits_x^{+\infty}f_{t_B}(t)(t-x)^2e^{-3(t-x)}dt=\frac{3375}{4}e^{3x}\int\limits_0^{+\infty}t^2(t-x)^2e^{-8t}dt=$$

$$=\left(\frac{10125}{16384}-\frac{10125}{4096}x+\frac{3375}{1024}x^2\right)e^{3x};$$

якщо $x \geq 0$, то

$$\frac{27}{2}\int\limits_x^{+\infty} f_{t_B}(t)(t-x)^2 e^{-3(t-x)}dt = \frac{3375}{4}e^{3x}\int\limits_x^{+\infty} t^2(t-x)^2 e^{-8t}dt =$$

$$= \frac{3375}{16384}(16x^2+12x+3)e^{-5x}.$$

Таким чином, щільністю розподілу випадкової величини $t_B - t_A$ є

$$f_{t_B-t_A}(x) = \begin{cases} \left(\frac{10125}{16384} - \frac{10125}{4096}x + \frac{3375}{1024}x^2\right)e^{3x}, & \text{якщо } x < 0; \\ \frac{3375}{16384}(16x^2+12x+3)e^{-5x}, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

За відомою щільністю розподілу $f_{t_B-t_A}(x)$ випадкової величини $t_B - t_A$ обчислюємо шукану ймовірність

$$P\{t_B - t_A > 0\} = \int\limits_0^{+\infty} f_{t_B-t_A}(x)dx =$$

$$= \frac{3375}{16384}\int\limits_0^{+\infty}(16x^2+12x+3)e^{-5x}dx = 0,2752.$$

2.3. Від'ємний біномний розподіл

Якщо число договорів N — велике, а ймовірність позову p, породженого одним дововором мала, то число позовів ν за фіксований проміжок часу описується пуассоновим розподілом

$$\pi_i(\lambda) = P\{\nu = i\} = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

де λ — середнє число позовів за інтервал часу, який розглядається.

Як правило, параметр λ залежить від низки факторів (наприклад, у випадку страхування автомобілів λ залежить від числа днів з поганою погодою), тому фактично ми маємо справу з сім'єю розподілів

$$\pi_i(\lambda), \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

яка залежить від параметра λ. Нехай параметр λ має розподіл F_λ, тоді розподіл числа позовів у цій моделі знаходимо як суміш розподілів:

$$\pi_i = \int\limits_0^{+\infty} \pi_i(x)F_\lambda(dx), \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

(див. також розд. 1.7). Зокрема, якщо розподіл F_λ абсолютно неперервний зі щільністю $f_\lambda(x)$, то

$$\pi_i = \int\limits_0^{+\infty} \pi_i(x)f_\lambda(x)dx, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Далі розглянемо ситуацію, коли параметр λ має гамма-розподіл з параметрами α, β:

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}, & \text{якщо } x > 0, \\ 0, & \text{якщо } x \leq 0. \end{cases}$$

Гамма-розподіл адекватно моделює ситуацію, коли значення параметра λ коливаються навколо деякого значення λ_0 (досить малі й досить великі значення λ хоча й можливі, але малоймовірні).

У разі гамма-розподілу параметра λ суміш пуассонових розподілів має вигляд

$$\pi_i = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^i}{i!}e^{-x}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx =$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{i!\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^{+\infty} x^{i+\alpha-1}e^{-(\beta+1)x}dx, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Після заміни $(\beta+1)x = t$ маємо

$$\pi_i = \frac{\beta^\alpha}{i!\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{t}{\beta+1}\right)^{i+\alpha-1} e^{-t} \frac{dt}{\beta+1} =$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{i!\Gamma(\alpha)(\beta+1)^{i+\alpha}} \int\limits_0^{+\infty} t^{i+\alpha-1} e^{-t} dt = \frac{\beta^\alpha}{i!\Gamma(\alpha)(\beta+1)^{i+\alpha}} \Gamma(i+\alpha) =$$

$$= \frac{\beta^\alpha (i+\alpha-1)(i+\alpha-2)\ldots\alpha}{(\beta+1)^{i+\alpha}\, i!} =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+i-1)}{i!} \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^\alpha \left(\frac{1}{\beta+1}\right)^i =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+i-1)}{i!} p^\alpha q^i,$$

де $p = \beta/(\beta+1)$, $q = 1/(\beta+1)$.

Розподіл

$$\pi_i = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+i-1)}{i!} p^\alpha q^i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

називається *від'ємним біноміним розподілом із параметрами* p *та* α $(\alpha > 0)$.

Генератриса від'ємного біномного розподілу дорівнює

$$g(z) = Mz^\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{k!} p^\alpha q^k z^k =$$

$$= p^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{-\alpha(-\alpha-1)\ldots(-\alpha-k+1)}{k!} (zq)^k =$$

$$= p^\alpha (1-zq)^{-\alpha} = \left(\frac{p}{1-zq}\right)^\alpha.$$

За відомою генератрисою числа позовів ν знаходимо $M\nu$ і $D\nu$:

$$M\nu = g'(1) = \frac{\alpha q}{p}, \;\; D\nu = g''(1) + g'(1) - (g'(1))^2 = \frac{\alpha q}{p^2}.$$

Приклад 2.3.1. *Актуарій страхової компанії, яка займається страхуванням автомобілів, установив, що для навмання обраного застрахованого автомобіля розподіл числа позовів, поданих протягом року, має від'ємний біномний розподіл із середнім* $0,2$ *та дисперсією* $0,4$.

Для кожного конкретного застрахованого автомобіля розподіл числа позовів, поданих протягом року, є пуассоновим розподілом, параметр якого для навмання обраного автомобіля гамма-розподілений. Обчислити середнє та дисперсію гамма-розподілу.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай ν — число позовів, поданих протягом року. Для від'ємного біномного розподілу з параметрами p та α середнє та дисперсія числа поданих позовів за одним договором дорівнюють

$$M\nu = \frac{\alpha(1-p)}{p}, \;\; D\nu = \frac{\alpha(1-p)}{p^2},$$

звідки

$$p = \frac{M\nu}{D\nu} = 0,5, \quad \alpha = \frac{(M\nu)^2}{D\nu - M\nu} = 0,2.$$

Від'ємний біномний розподіл з параметрами $(p = \beta/(\beta+1), \alpha)$ можна розглядати як рандомізований пуассонів розподіл з параметром λ, що має гамма-розподіл з параметрами α, β. Тому гамма-розподіл має параметри

$$\alpha = \frac{(M\nu)^2}{D\nu - M\nu} = 0,2,$$

$$\beta = \frac{p}{1-p} = \frac{M\nu}{D\nu - M\nu} = 1,$$

а отже, середнє та дисперсія гамма-розподілу дорівнюють

$$\frac{\alpha}{\beta} = M\nu = 0,2, \quad \frac{\alpha}{\beta^2} = D\nu - M\nu = 0,2$$

відповідно.

2.4. Задачі

2.1. Число поданих позовів протягом місяця задається випадковою величиною ν з розподілом

$$P\{\nu = n\} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Обчислити ймовірність того, що протягом місяця буде подано принаймні один позов, якщо відомо, що число поданих позовів протягом місяця не перевищує 4.

2.2. Число позовів, поданих протягом одного тижня, не залежить від числа позовів, поданих протягом інших тижнів, і задається випадковою величиною ν з розподілом

$$P\{\nu = n\} = \frac{1}{2^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Обчислити ймовірність того, що протягом двох тижнів буде подано 7 позовів.

2.3. Число позовів за одним договором страхування протягом року має пуассонів розподіл, при цьому для половини договорів середнє число позовів за рік дорівнює 2, а для іншої половини — 4. За навмання обраним договором два роки поспіль було подано по 4 позови за рік. З'ясувати, скільки в середньому можна очікувати позовів за цим договором в наступному році.

2.4. Страхова компанія встановила ціну на страхування збитків від ураганів за таких припущень: 1) протягом одного року не може бути більше одного урагану; 2) ймовірність того, що протягом одного року відбудеться ураган, дорівнює 0,05; 3) число ураганів протягом одного року не залежить від числа ураганів протягом інших років. Використовуючи припущення компанії, обчислити ймовірність того, що за 20 років відбудеться менше трьох ураганів.

2.5. Актуарій страхової компанії встановив, що протягом дії певного виду договору застраховані подають два позови в три рази частіше, ніж чотири. Обчислити дисперсію числа поданих позовів, якщо воно має пуассонів розподіл.

2.6. Страхова компанія уклала 1 250 договорів страхування. Число позовів за одним договором протягом року має пуассонів розподіл із середнім 2. Відомо, що числа позовів, поданих до компанії різними застрахованими, не залежать одне від одного. Обчислити ймовірність того, що за портфелем договорів у цілому протягом року буде подано від 2 450 до 2 600 позовів.

2.7. Розподіл числа позовів ν до страхової компанії є рандомізованим пуассоновим розподілом із середнім значенням, що рівномірно розподілено на відрізку $[0; 5]$. Обчислити ймовірність того, що до компанії буде подано принаймні два позови.

2.8. Число позовів ν до страхової компанії має рандомізований пуассонів розподіл із середнім значенням λ, що гамма-розподілено із середнім 1 та дисперсією 2. Обчислити ймовірність того, що число позовів до компанії дорівнює 1.

2.9. Проміжок часу від моменту укладання договору страхування цивільної відповідальності водіїв до моменту настання першого страхового випадку для досвідчених водіїв має експоненціальний розподіл із середнім 6 років, а для недосвідчених водіїв — експоненціальний розподіл із середнім 3 роки. Для різних водіїв ці проміжки часу є незалежними випадковими величинами. Розглянемо двох водіїв, одного досвідченого, а іншого — недосвідченого. Обчислити ймовірність того, що для досвідченого водія час до настання страхового випадку менший ніж 3 роки, а для недосвідченого — менший ніж 2 роки.

2.10. Процес подання позовів до страхової компанії є пуассоновим з параметром 2. Обчислити середній час до подання п'ятого позову.

2.11. Нехай t_k — час між закінченням обробки $(k-1)$-ї та k-ї заяв про страхові випадки відділом регулювання збитків страхової компанії. Відомо, що $t_1, t_2, \ldots$ — незалежні в сукупності й однаково розподілені випадкові величини, щільність кожної дорівнює $0,2e^{-0,2t}, t > 0$, де t вимірюється у хвилинах. Обчислити ймовірність того, що протягом 10 хв буде оброблено принаймні 2 заяви.

2.12. Частина портфеля автомобільного страхування складається з договорів з високим ступенем ризику. Для кожного такого договору проміжок часу від початку року до моменту надходження позову має експоненціальний розподіл. Страхова компанія припускає, що протягом перших 50 днів року позови подаватимуться за 30% договорів з високим ступенем ризику. Визначити середню частку договорів з високим ступенем ризику, за якими будуть подані позови протягом перших 80 днів року.

2.13. Страхова компанія уклала 4 000 договорів страхування. Договори статистично однорідні та позови, подані за договорами, незалежні. Далі наведені дані про число позовів, поданих за одним договором протягом року:

Число поданих позовів	0	1	2	3
Число договорів	3288	642	66	4

Припускаючи, що число поданих позовів за одним договором має пуассонів розподіл, оцінити параметр λ цього розподілу. Побудувати довірчий інтервал для параметра λ з коефіцієнтом надійності 0,95.

2.14. Страхова компанія займається страхуванням цивільної відповідальності власників автомобілів. Деякі клієнти компанії завищують число автомобілів ν, пошкоджених у дорожньо-транспортних пригодах, що відбулися з їх вини (намагаючись одержати частку від незаконно виплаченої величини дійсно поданого позову).

Далі наведені дані 1) про число автомобілів, пошкоджених у результаті 1 000 ДТП, винуватцями яких є власники автомобілів, застрахованих у компанії; 2) про ймовірності пошкодження автомобілів у результаті одного ДТП, одержані за допомогою статистичного аналізу ретельно розслідуваних страхових випадків (що виключає будь-яку можливість шахрайства).

Число пошкоджених автомобілів	Імовірність	Число ДТП
1	0,25	235
2	0,35	335
3	0,24	250
4	0,11	111
5	0,04	47
≥ 6	0,01	22

Застосовуючи критерій χ^2, перевірити гіпотезу про те, що серед поданих 1 000 позовів до компанії не було випадків шахрайства.

2.15. Далі наведені дані про число позовів, поданих за один день протягом року до страхової компанії:

Число позовів за день	Число днів
0	50
1	122
2	101
3	92
≥ 4	0

Застосовуючи критерій χ^2, перевірити гіпотезу про пуассонів розподіл числа позовів, поданих за один день протягом року.

Розділ 3

Математична модель індивідуального ризику

Модель індивідуального ризику — найпростіша з моделей функціонування страхової компанії, за допомогою якої можна обчислити ймовірність банкрутства компанії. Вона базується на таких припущеннях.

1) Аналізується короткий проміжок часу (отже, можна знехтувати інфляцією та не враховувати прибуток від інвестування).

2) Число договорів страхування N фіксоване.

3) Плата за страховку вноситься на початку періоду страхування (ніяких надходжень протягом цього періоду немає), розрахунок проводиться в кінці періоду.

4) Кожен договір страхування розглядається незалежно від інших, розподіл індивідуального позову X_i за i-м договором $(i = 1, 2, \ldots, N)$ відомий.

За наявності цих припущень ймовірність банкрутства визначається сумарним позовом $S = \sum\limits_{i=1}^{N} X_i$ до страхової компанії та величиною резервного капіталу компанії u.

Якщо сумарний позов S більший, ніж капітал компанії u, то компанія не зможе виконати свої зобов'язання і збанкрутує. Тому ймовірність банкрутства компанії дорівнює

$$R = P\left\{\sum_{i=1}^{N} X_i > u\right\}.$$

3.1. Розрахунок імовірності банкрутства

Нагадаємо, що за розподілами F та G незалежних випадкових величин ξ_1 і ξ_2 розподіл Q суми $\xi_1+\xi_2$ одержуємо як згортку розподілів F і G:

$$Q(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} G(x-y)F(dy) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} F(x-y)G(dy).$$

Зокрема, якщо G і F — атомічні розподіли, зосереджені в атомах $0, 1, 2, \ldots$:

$$G(\{i\}) = g_i, \quad i = 0,1,2,\ldots, \quad F(\{j\}) = f_j, \quad j = 0,1,2,\ldots,$$

то згортка $Q = F * G = G * F$ є атомічним розподілом, зосередженим в атомах $0, 1, 2, \ldots$, причому

$$Q(\{k\}) = q_k = \sum_{i=0}^{k} g_{k-i} f_i = \sum_{i=0}^{k} f_{k-i} g_i,$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$

У припущенні, що розподіли величин позовів $X_1, X_2, \ldots, X_N$ відомі й випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_N$ незалежні, розподіл суми $\sum\limits_{i=1}^{N} X_i$ можна обчислити як згортку розподілів цих випадкових величин.

За відомим розподілом суми $\sum\limits_{i=1}^{N} X_i$ ймовірність банкрутства компанії обчислюється так:

$$R = P\left\{\sum_{i=1}^{N} X_i > u\right\},$$

де u — капітал компанії.

Зазначимо, що в моделі індивідуального ризику величини позовів X_i, $i = 1, \ldots, N$ не можуть бути абсолютно неперервними, оскільки їх розподіли мають атоми в нулі.

Приклад 3.1.1. *Портфель компанії складається з чотирьох однакових договорів страхування життя. Якщо смерть*

застрахованого настала через нещасний випадок, то спадкоємцям виплачують 500 000 *грн. Якщо смерть застрахованого наступила природно, то страхова виплата дорівнює* 250 000 *грн у певній віковій категорії. Імовірність природної смерті дорівнює* $0,1$, *а ймовірність смерті від нещасного випадку —* $0,001$. *Знайти залежність імовірності банкрутства* R *від величини капіталу компанії* u.

Розв'язання. Перший спосіб. Для розрахунків зручно прийняти 250 000 грн за одиницю виміру грошових сум. Тоді розподіл індивідуального позову X_i за i-м договором ($i = 1, 2, 3, 4$) відомий і дорівнює

0	1	2
0,899	0,1	0,001

причому X_1, X_2, X_3, X_4 — незалежні випадкові величини. Розподіл суми $X_1 + X_2$ індивідуальних позовів знаходимо як згортку атомічних розподілів. Спільний розподіл (X_1, X_2) має такий вигляд:

Значення X_1	Значення X_2: 0	1	2
0	0,8082	0,0899	$8,99 \cdot 10^{-4}$
1	0,0899	0,01	10^{-4}
2	$8,99 \cdot 10^{-4}$	10^{-4}	10^{-6}

Звідси розподіл суми $X_1 + X_2$ такий:

0	1	2	3	4
0,8082	0,1798	0,0118	$2 \cdot 10^{-4}$	10^{-6}

Аналогічно знаходимо розподіл суми $X_1 + X_2 + X_3$. Спільний розподіл $(X_1 + X_2, X_3)$ має такий вигляд:

Значення X_3	Значення $X_1 + X_2$: 0	1	2	3	4
0	0,7266	0,1616	0,0106	$1,8 \cdot 10^{-4}$	$8,99 \cdot 10^{-7}$
1	0,0808	0,0180	0,0012	$2,0 \cdot 10^{-5}$	10^{-7}
2	$8,08 \cdot 10^{-4}$	$1,8 \cdot 10^{-4}$	$1,18 \cdot 10^{-5}$	$2,0 \cdot 10^{-7}$	10^{-9}

Тому розподіл суми $X_1 + X_2 + X_3$ такий:

0	1	2	3	4	5	6
0,7266	0,2425	0,0294	$1,54\cdot 10^{-3}$	$3,27\cdot 10^{-5}$	$3\cdot 10^{-7}$	10^{-9}

Спільний розподіл $(X_1+X_2+X_3, X_4)$ дорівнює

Значення	Значення X_4		
$X_1+X_2+X_3$	0	1	2
0	0,6532	0,0727	$7,27\cdot 10^{-4}$
1	0,2180	0,0242	$2,42\cdot 10^{-4}$
2	0,0264	0,0029	$2,94\cdot 10^{-5}$
3	$1,38\cdot 10^{-3}$	$1,54\cdot 10^{-4}$	$1,54\cdot 10^{-6}$
4	$2,94\cdot 10^{-5}$	$3,27\cdot 10^{-6}$	$3,27\cdot 10^{-8}$
5	$2,7\cdot 10^{-7}$	$3\cdot 10^{-8}$	$3\cdot 10^{-10}$
6	$8,99\cdot 10^{-10}$	10^{-10}	10^{-12}

Тоді розподіл суми $X_1+X_2+X_3+X_4$ такий:

0	0,6532	5	$5,08\cdot 10^{-6}$
1	0,2906	6	$6,36\cdot 10^{-8}$
2	0,0514	7	$4\cdot 10^{-10}$
3	$4,57\cdot 10^{-3}$	8	10^{-12}
4	$2,13\cdot 10^{-4}$		

Отже, залежність ймовірності банкрутства R від капіталу компанії u дорівнює $R(u) = P\{X_1+X_2+X_3+X_4 > u\}$ і задається таблицею

u	$R(u)$	u	$R(u)$
0	0,3468	5	$6,4\cdot 10^{-8}$
1	0,0562	6	$4,01\cdot 10^{-10}$
2	0,0048	7	10^{-12}
3	$2,18\cdot 10^{-4}$	8	0
4	$5,14\cdot 10^{-6}$		

Другий спосіб. Застосуємо генератриси для знаходження розподілу суми $X_1+X_2+X_3+X_4$, а саме кожен індивідуальний позов за i-м договором $(i = 1,2,3,4)$ має одну й ту ж генератрису

$$g_1(z) = g_2(z) = g_3(z) = g_4(z) = 0,899z^0 + 0,1z^1 + 0,001z^2.$$

Тоді генератриса суми $X_1+X_2+X_3+X_4$ дорівнює

$$g(z) = g_1(z)g_2(z)g_3(z)g_4(z) = (0,899z^0 + 0,1z^1 + 0,001z^2)^4 =$$

$$= 0,6532 + 0,2906z + 0,0514z^2 + 4,57\cdot 10^{-3}z^3 + 2,13\cdot 10^{-4}z^4 +$$

$$+5,08\cdot 10^{-6}z^5 + 6,36\cdot 10^{-8}z^6 + 4\cdot 10^{-10}z^7 + 10^{-12}z^8.$$

Коефіцієнт при z^n дорівнює ймовірності $P\left\{\sum\limits_{j=1}^{4} X_j = n\right\}$, $n = 0,1,\ldots,8$.

Отже, залежність ймовірності банкрутства R від капіталу компанії u задається таблицею

u	$R(u)$	u	$R(u)$
0	0,3468	5	$6,4\cdot 10^{-8}$
1	0,0562	6	$4,01\cdot 10^{-10}$
2	0,0048	7	10^{-12}
3	$2,18\cdot 10^{-4}$	8	0
4	$5,14\cdot 10^{-6}$		

Наближений метод розрахунку ймовірності банкрутства. Число договорів (число застрахованих осіб) N, як правило, велике. Тому розподіл суми $S_N = \sum\limits_{i=1}^{N} X_i$ як згортку розподілів випадкових величин зазвичай не обчислюють, а знаходять, застосовуючи центральну граничну теорему.

Якщо випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_N$ — незалежні та однаково розподілені зі скінченною дисперсією $DX_i = \sigma^2 < \infty$, то при $N \to \infty$

$$P\left\{\frac{S_N - MS_N}{\sqrt{DS_N}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Згідно з центральною граничною теоремою для великих N як розподіл нормованої суми

$$\frac{S_N - MS_N}{\sqrt{DS_N}}$$

можна розглядати нормальний розподіл із параметрами (0;1). Тоді ймовірність банкрутства можна обчислити так:

$$R = P\{S_N > u\} = 1 - N_{0;1}\left(\frac{u - MS_N}{\sqrt{DS_N}}\right),$$

де $N_{0;1}(s)$ — значення функції нормального розподілу з параметрами (0;1) у точці s.

Приклад 3.1.2. *У страховій компанії застраховано* $N = 3\,000$ *осіб з імовірністю смерті протягом року* $0,003$. *Компанія виплачує нащадкам суму* $250\,000$ *грн у випадку смерті застрахованого протягом року і не платить нічого, якщо особа доживе до кінця року. Визначити мінімальну величину капіталу, за якого ймовірність банкрутства компанії не перевищує* $0,05$.

Р о з в' я з а н н я. Візьмемо величину 250 000 грн за одиницю виміру грошових сум.Тоді індивідуальний позов X_i до компанії має розподіл

0	1
0,997	0,003

при цьому $MX_i = 0,003$, $DX_i = 0,002991$ та $X_1, X_2, \ldots, X_{3000}$ — незалежні випадкові величини. Тоді математичне сподівання MS та дисперсія DS сумарного позову $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_{3000}$ до компанії дорівнюють $MS = M(X_1 + X_2 + \ldots + X_{3000}) = 3000 \cdot 0,003 = 9$, $DS = D(X_1 + X_2 + \ldots + X_{3000}) = 3000 \cdot 0,002991 = 8,973$. Знайдемо величину капіталу компанії, при якому ймовірність банкрутства компанії дорівнює 0,05. Маємо

$$0,05 = P\{S > u\} = 1 - N_{0;1}\left(\frac{u - MS}{\sqrt{DS}}\right),$$

$$N_{0;1}\left(\frac{u - 9}{\sqrt{8,973}}\right) = 0,95,$$

звідси

$$\frac{u - 9}{\sqrt{8,973}} = 1,65$$

і мінімальний капітал компанії має бути не меншим $u = 13,94$ або $3\,485\,642,4$ грн.

3.2. Принципи призначення страхових премій

Сума p, за яку фізична або юридична особа купує собі страховку (страховий захист), називається страховою премією. Питання про премію, яку призначає страхова компанія за той чи інший взятий на себе ризик, досить складне. Щоб відповісти на нього, необхідно враховувати велику кількість факторів: імовірність подання позову, очікувану величину позову, величину розсіювання позовів, зв'язок з іншими позовами, які вже прийняла компанія, організаційні витрати на ведення угод, співвідношення між попитом та пропозицією за даним видом ризиків на ринку страхових послуг та ін. Але основним принципом є принцип еквівалентності фінансових зобов'язань страхової компанії та страхувальника.

Розглянемо найпростіший вид страхування, коли плата за страховку повністю вноситься в момент укладання угоди. Тоді зобов'язання страхувальника виражаються у сплаті премії p. Зобов'язання компанії полягають у сплаті позову X.

З'ясуємо, у чому полягає принцип еквівалентності фінансових зобов'язань. Зрозуміло, що цей принцип не може виражатися рівністю $p = X$ вже хоча б тому, що p — константа, а X — випадкова величина. Тоді, мабуть, принцип еквівалентності можна виразити рівністю

$$p = MX$$

(премія дорівнює середньому значенню позову). Оцінимо, якими при цьому будуть можливості виконання компанією своїх зобов'язань, точніше обчислимо ймовірність банкрутства в межах моделі індивідуального ризику.

Нехай N — число договорів у портфелі компанії; $X_1, X_2, \ldots, X_N$ — позови за цими договорами; $S = \sum\limits_{i=1}^{N} X_i$ — величина сумарного позову; p_i — плата за i-м договором, тобто p_i дорівнює MX_i.

Резервний фонд компанії u дорівнює

$$u = \sum_{i=1}^{N} p_i = \sum_{i=1}^{N} MX_i = M\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = MS.$$

Імовірність банкрутства за припущення $p = MX$ дорівнює

$$R = P\{S > MS\}.$$

Обчислимо цю ймовірність за допомогою гауссового наближення:

$$R = P\{S > u\} = P\{S - MS > 0\} = P\left\{\frac{S - MS}{\sqrt{DS}} > 0\right\} =$$

$$= 1 - N_{0;1}(0) = 1/2.$$

Безумовно, така ймовірність банкрутства неприйнятна (за цих припущень компанія виконує свої зобов'язання лише з імовірністю 1/2). Тому рівність $p = MX$ не виражає еквівалентності зобов'язань компанії та застрахованої особи. Компанія має ризик, повязаний із тим, що внаслідок випадкових обставин вона повинна буде (з імовірністю 1/2) сплатити більшу суму, ніж MX. Застрахована особа такого ризику не має. Тому природно, щоб плата за страховку включала деяку надбавку l, яка б гарантувала виплату позовів (виконання страховою компанією своїх зобов'язань) із великою ймовірністю. Призначимо таку премію за i-ту страховку:

$$p_i = MX_i + l_i.$$

Величину MX_i називають *нетто-премією*, l_i — *страховою надбавкою*, а $\theta_i = l_i/MX_i$ — *відносною страховою надбавкою*.

Резерв u страхової компанії становитиме

$$u = \sum_{i=1}^{N} p_i = \sum_{i=1}^{N} (MX_i + l_i) = MS + l,$$

де $l = \sum\limits_{i=1}^{N} l_i$ — загальна додаткова сума.

Імовірність банкрутства компанії дорівнює

$$R = P\{S > u\} = P\{S > MS + l\} = P\left\{\frac{S - MS}{\sqrt{DS}} > \frac{l}{\sqrt{DS}}\right\} =$$

$$= 1 - N_{0;1}\left(\frac{l}{\sqrt{DS}}\right).$$

Для того щоб компанія не збанкрутувала (виконала свої зобов'язання) з імовірністю α (α — число, близьке до 1), необхідно, щоб

$$\alpha = 1 - R = P\left\{\frac{S - MS}{\sqrt{DS}} < \frac{l}{\sqrt{DS}}\right\} = N_{0;1}\left(\frac{l}{\sqrt{DS}}\right),$$

l одержимо з умови

$$\frac{l}{\sqrt{DS}} = x_\alpha,$$

отже,

$$l = x_\alpha \sqrt{DS}, \qquad (3.2.1)$$

де x_α — α-квантиль нормального розподілу.

Співвідношення $l = x_\alpha\sqrt{DS}$ показує величину загальної додаткової суми l. Тепер необхідно з'ясувати, як справедливо розподілити її між N договорами.

Зазвичай суму l розподіляють пропорційно очікуваному позову MX_i, тобто

$$l_i = kMX_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \qquad (3.2.2)$$

За цих умов

$$l = \sum_{i=1}^{N} l_i = k\sum_{i=1}^{N} MX_i = kM\sum_{i=1}^{N} X_i,$$

$$l = kMS.$$

З останньої рівності й співвідношення (3.2.1) маємо

$$x_\alpha\sqrt{DS} = kMS,$$

або

$$k = x_\alpha\frac{\sqrt{DS}}{MS}.$$

Отже, за умов (3.2.2) страхова надбавка за i-м договором дорівнює

$$l_i = kMX_i = x_\alpha\frac{\sqrt{DS}}{MS}MX_i,$$

а премія —

$$p_i = MX_i + l_i = (1+\theta_i)MX_i = MX_i + MX_i\left(x_\alpha\frac{\sqrt{DS}}{MS}\right). \qquad (3.2.3)$$

Призначення страхових надбавок згідно з формулою

$$l_i = x_\alpha\frac{\sqrt{DS}}{MS}MX_i$$

не слушне щодо договорів із малим розсіюванням величини X_i можливого позову, тобто з малою дисперсією DX_i, оскільки внесок таких страхових надбавок до загальної надбавки l непропорційно великий порівняно зі внеском страхових надбавок за договорами з великою дисперсією. Тому було б слушно призначати страхові надбавки l_i за договорами пропорційно дисперсіям DX_i або середньоквадратичним відхиленням $\sqrt{DX_i}$, тобто так:

$$l_i = kDX_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{3.2.4}$$

або

$$l_i = k\sqrt{DX_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{3.2.5}$$

Якщо страхові надбавки призначені за умови, що

$$l_i = kDX_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

то

$$l = \sum_{i=1}^{N} l_i = k \sum_{i=1}^{N} DX_i = kDS.$$

Звідси $k = l/DS$. Враховуючи, що $l = x_\alpha\sqrt{DS}$, маємо

$$k = \frac{x_\alpha}{\sqrt{DS}},$$

$$p_i = MX_i + \frac{x_\alpha}{\sqrt{DS}} DX_i, \quad i = 1, 2, \ldots N.$$

Якщо страхові надбавки призначені за умови, що

$$l_i = k\sqrt{DX_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

то

$$l = \sum_{i=1}^{N} l_i = k \sum_{i=1}^{N} \sqrt{DX_i},$$

звідси

$$k = l \Big/ \left(\sum_{i=1}^{N} \sqrt{DX_i} \right),$$

$$p_i = MX_i + x_\alpha \frac{\sqrt{DS}}{\sum\limits_{i=1}^{N} \sqrt{DX_i}} \sqrt{DX_i}, \quad i = 1, 2, \ldots N.$$

Питання про те, яке призначення страхових надбавок є більш слушним з позиції страхувальника (страхова компанія в будь-якому випадку одержить одну й ту ж необхідну суму $l = x_\alpha\sqrt{DS}$) в актуарній математиці залишається відкритим. Якщо всі договори статистично однорідні (тобто MX_i однакові, DX_i однакові, $i = 1, \ldots, N$), то (3.2.2), (3.2.4), (3.2.5) дають один і той самий результат:

$$\sum_{i=1}^{N} l_i = x_\alpha \sqrt{\sum_{i=1}^{N} DX_i}\ ;$$

$$Nl_i = x_\alpha \sqrt{NDX_i}\,;$$

$$l_i = x_\alpha \sqrt{\frac{DX_i}{N}}\,.$$

Приклад 3.2.1. *Страхова компанія уклала $N = 10\,000$ договорів страхування життя строком на один рік на таких умовах. У разі смерті застрахованого протягом року від нещасного випадку компанія виплачує спадкоємцям 1 млн грн, а в разі смерті протягом року внаслідок природних причин — 250 000 грн. Компанія не платить нічого, якщо застрахований не помре протягом року. Імовірність смерті через нещасний випадок одна й та ж для всіх застрахованих і дорівнює $0,0005$. Імовірність смерті внаслідок природних причин залежить від віку. N застрахованих були розподілені на дві вікові групи, які містять $N_1 = 4\,000$ і $N_2 = 6\,000$ чоловік із імовірністю смерті протягом року $q_1 = 0,004$ і $q_2 = 0,002$ відповідно.*

Підрахувати величину премії, яка забезпечує виконання компанією своїх зобов'язань із імовірністю $0,95$.

Р о з в' я з а н н я. Для розрахунків зручно взяти 250 000 грн за одиницю виміру грошових сум. Тоді розподіл індивідуального позову X_i за i-м договором $(i = 1, 2, \ldots, 4\,000)$ першої групи договорів відомий і дорівнює $P\{X_i = 0\} = 0,9955$, $P\{X_i = 1\} = 0,004$, $P\{X_i = 4\} = 0,0005$.

При цьому $X_1, X_2, \ldots, X_{4000}$ — незалежні випадкові величини, $m_1 = MX_i = 0,006$; $\sigma_1^2 = DX_i = 0,012$; $i = 1, 2, \ldots, 4\,000$.

Розподіл індивідуального позову X_j за j-м договором ($j = 1, 2, \ldots, 6\,000$) другої групи договорів відомий і дорівнює $P\{X_j = 0\} = 0,9975$, $P\{X_j = 1\} = 0,002$, $P\{X_j = 4\} = 0,0005$, при цьому $X_1, X_2, \ldots, X_{6000}$ — незалежні випадкові величини, $m_2 = MX_j = 0,004$; $\sigma_2^2 = DX_j = 0,01$; $j = 1, 2, \ldots, 6\,000$.

Математичне сподівання MS та дисперсія DS сумарного позову до компанії дорівнюють $MS = 4\,000 \cdot m_1 + 6\,000 \cdot m_2 = 48$, $DS = 4\,000 \cdot \sigma_1^2 + 6\,000 \cdot \sigma_2^2 = 107,76$.

Якими б не були принципи призначення страхових премій, страхова компанія в будь-якому випадку одержить одну й ту саму необхідну суму

$$l = x_{0,95}\sqrt{DS} = 1,645\sqrt{107,76} = 17,076,$$

де x_α — α-квантиль нормального розподілу.

Якщо суму l розподіляють пропорційно MX_i, то страхова надбавка за i-м договором дорівнює

$$l_i = kMX_i = x_{0,95}\frac{\sqrt{DS}}{MS}MX_i,$$

а премія — $p_i = MX_i + l_i$. Для першої групи договорів $l_1 = 0,002135$, $p_1 = 0,008135$ або 2034 грн. Для другої групи договорів — $l_2 = 0,001423$, $p_2 = 0,005423$ або 1 356 грн.

Якщо суму l розподіляють пропорційно DX_i, то страхова надбавка за i-м договором дорівнює

$$l_i = kDX_i = \frac{x_{0,95}}{\sqrt{DS}}DX_i,$$

а премія — $p_i = MX_i + l_i$. Для першої групи договорів $l_1 = 0,001896$, $p_1 = 0,007896$ або 1 974 грн. Для другої групи договорів $l_2 = 0,00158$, $p_2 = 0,00558$ або 1 396 грн.

Якщо суму l розподіляють пропорційно $\sqrt{DX_i}$, то страхова надбавка за i-м договором дорівнює

$$l_i = k\sqrt{DX_i} = x_{0,95}\frac{\sqrt{DS}}{\sum\limits_{i=1}^{N}\sqrt{DX_i}}\sqrt{DX_i},$$

а премія — $p_i = MX_i + l_i$. Для першої групи договорів $l_1 = 0,001801$, $p_1 = 0,007801$ або 1 950 грн. Для другої групи договорів $l_2 = 0,001645$, $p_2 = 0,005645$ або 1 411 грн.

Додаткові принципи призначення премій. Розглянемо ще декілька принципів призначення страхових премій та наведемо їх властивості. Ці принципи можна застосовувати як до окремих полісів, так і до портфелів.

Через $p[F_X]$ і $p[X]$ позначатимемо премію, яка відповідає позову X (F_X — функція розподілу X).

а) *Принцип математичного сподівання*:

$$p[X] = (1+\alpha)MX.$$

αMX — страхова надбавка, $\alpha > 0$ — параметр.

б) *Принцип дисперсії*:

$$p[X] = MX + \alpha DX \quad (\alpha > 0).$$

в) *Принцип середньоквадратичного відхилення*:

$$p[X] = MX + \alpha\sigma(X) \quad (\alpha > 0).$$

г) *Експоненціальний принцип*:

$$p[X] = \frac{1}{\alpha}\ln M\left(e^{\alpha X}\right).$$

Параметр $\alpha > 0$ називається *неприйняттям ризику*.

Властивості принципів призначення премій. Нижче наведені основні властивості призначення премій.

1) *Невід'ємність надбавки*:

$$p[X] \geq MX.$$

Якщо ця властивість не справджується, то страхова компанія збанкрутує.

2) *C-адитивність*:

$$p[X+c] = p[X] + c$$

для будь-якої константи c.

Смисл цієї властивості такий: якщо позов збільшується на деяку константу c, то й премія повинна збільшитись на c.

3) Адитивність:

$$p[X+Y] = p[X] + p[Y]$$

для незалежних X і Y.

Далі наведені властивості принципів призначення премій. Знак "+" вказує на наявність властивості, знак "−" — на відсутність.

Властивість	Принцип			
	а	б	в	г
1	+	+	+	+
2	−	+	+	+
3	+	+	−	+

Усі три властивості виконуються лише для принципу дисперсії і експоненціального принципу.

3.3. Задачі

3.1. Портфель компанії складається з чотирьох однакових договорів страхування життя. Якщо смерть застрахованого настала внаслідок нещасного випадку, то нащадкам виплачують 500 000 грн. Якщо смерть застрахованого настала в результаті природних причин, то страхова виплата дорівнює 250 000 грн у певній віковій категорії. Для кожного із застрахованих імовірність смерті через нещасний випадок дорівнює 0,1, ймовірність смерті у зв'язку з природними причинами дорівнює 0,1 і, отже, ймовірність дожиття дорівнює 0,8. Знайти залежність ймовірності банкрутства R від величини капіталу компанії u: а) за методом згорток; б) методом генератрис.

3.2. Портфель компанії складається з двох договорів страхування будівель від пожежі. Вартість першої будівлі $c_1 = 1$ млн грн, а другої — $c_2 = 2$ млн грн. Імовірність пожежі на першому (другому) об'єкті протягом проміжку часу, який розглядається, $q_1 = 0,2$ ($q_2 = 0,1$), а збитки від пожежі Y_1 (Y_2), якщо вона має місце, рівномірно розподілені від 0 до повної вартості об'єкта.

Знайти залежність імовірності банкрутства R від капіталу компанії u.

3.3. Портфель страхової компанії складається з 1 800 договорів страхування життя строком на один рік. Страхові виплати поділяються на 2 групи розміром 100$ і 200$ для застрахованих з імовірністю настання страхового випадку 0,02 або 0,10 відповідно. Далі наведена кількість застрахованих n_k у кожній із чотирьох груп, що відповідає різним значенням страхової виплати b_k і ймовірності позову q_k.

k	q_k	b_k	n_k
1	0,02	100$	500
2	0,02	200$	500
3	0,10	100$	300
4	0,10	200$	500

Визначити мінімальну величину капіталу, за наявності якого ймовірність банкрутства компанії не перевищує 0,05.

3.4. За умовами попередньої задачі обчислити величину премії для кожної групи застрахованих, яка забезпечує виконання компанією своїх зобов'язань з імовірністю 0,95.

3.5. Клієнти компанії, що займається страхуванням автомобілів, поділяються на 2 групи:

Група	Кількість у групі	Імовірність позову	Параметри зрізаного експоненціального розподілу	
k	n_k	q_k	λ	L
1	500	0,10	1	2,5
2	2000	0,05	2	5,0

Величина дійсно поданого позову має зрізаний експоненціальний розподіл, який задається функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{якщо } 0 \le x < L; \\ 1, & \text{якщо } x \ge L. \end{cases}$$

Визначити мінімальну величину капіталу, за наявності якого ймовірність банкрутства компанії не перевищує 0,05.

3.6. За умовами попередньої задачі обчислити величину премії для кожної групи застрахованих, яка забезпечує виконання компанією своїх зобов'язань з імовірністю 0,95.

3.7. Портфель страхової компанії складається з 16 000 договорів страхування життя строком на один рік. Далі наведена кількість застрахованих n_k у кожній з п'яти груп з різними значеннями страхової виплати b_k і ймовірності позову q_k.

k	q_k	b_k	n_k
1	0,01	10 000 грн	8000
2	0,02	20 000 грн	3500
3	0,03	30 000 грн	2500
4	0,05	50 000 грн	1500
5	0,1	100 000 грн	500

Визначити мінімальну величину капіталу, за наявності якого ймовірність банкрутства компанії не перевищує 0,05.

3.8. За умовами попередньої задачі обчислити величину премії для кожної групи застрахованих, яка забезпечує виконання компанією своїх зобов'язань з імовірністю 0,95.

3.9. Портфель компанії складається з чотирьох договорів страхування життя на один рік. Якщо смерть застрахованого настала через нещасний випадок, то спадкоємцям виплачують 1 млн грн згідно з умовами першого та четвертого договорів, 500 000 грн згідно з умовами другого договору, 750 000 грн згідно з умовами третього договору. Якщо смерть застрахованого настала природно, то страхова виплата дорівнює 500 000 грн згідно з умовами першого договору, 250 000 грн — за другим договором, 0 грн — за умовами третього та четвертого договорів. Імовірність смерті від нещасного випадку дорівнює 0,1 для застрахованих за першим, другим та четвертим договорами й 0,4 для застрахованих за третім договором. Імовірність природної смерті дорівнює 0,3 та 0,2 для застрахованих за першим та другим договорами відповідно.

x	$P(X_1 = x)$	$P(X_2 = x)$	$P(X_3 = x)$	$P(X_4 = x)$
0 грн	0,6	0,7	0,6	0,9
250 000 грн	0,0	0,2	0,0	0,0
500 000 грн	0,3	0,1	0,0	0,0
750 000 грн	0,0	0,0	0,4	0,0
1 000 000 грн	0,1	0,0	0,0	0,1

Знайти залежність імовірності банкрутства R від величини капіталу компанії u.

3.10. Компанія, що займається страхуванням від пожеж, застрахувала 160 будинків, які можна розділити на 5 груп згідно з вартістю будинку:

Група	Кількість договорів	Вартість будинку
1	80	10 000$
2	35	20 000$
3	25	30 000$
4	15	50 000$
5	5	100 000$

Імовірність пожежі для кожного будинку одна й та ж і дорівнює 0,04. Збитки від пожежі Y, якщо вона має місце, рівномірно розподілені від 0 до повної вартості будинку. Визначити мінімальну величину капіталу, за наявності якого ймовірність банкрутства компанії не перевищує 0,05.

3.11. Портфель компанії складається з 32 договорів страхування життя на один рік. Імовірність позову за кожним договором дорівнює $1/6$, а величина дійсно поданого позову Y має щільність

$$f(y) = \begin{cases} 2(1-y), & \text{якщо } 0 < y < 1; \\ 0, & \text{якщо } y \notin (0;1). \end{cases}$$

Позначимо через S величину сумарного позову до компанії. Оцінити $P\{S > 4\}$, застосовуючи гауссове наближення.

3.12. Страхова компанія уклала 300 договорів страхування від пожеж. Далі наведена кількість застрахованих n_k, що відповідає різним значенням страхової виплати b_k і ймовірності позову q_k.

n_k	b_k	q_k
100	400$	0,05
200	300$	0,06

Відомо, що величина дійсно поданого позову Y рівномірно розподілена від 0 до страхової виплати b_k; за кожним договором може бути поданий тільки один позов; позови подаються незалежно один від одного. Обчислити дисперсію сумарних виплат за портфелем договорів.

3.13. Страхова компанія уклала договори страхування будинків у містах J, K та L, які знаходяться на великій відстані одне від одного, тому й позови за договорами в цих містах не залежать один від одного. Генератриси нормованих моментів сумарних величин поданих позовів у містах J, K та L дорівнюють

$$\psi_J(z) = (1-2z)^{-3},$$

$$\psi_K(z) = (1-2z)^{-2{,}5},$$
$$\psi_L(z) = (1-2z)^{-4{,}5}.$$

Нехай випадкова величина S задає (описує) сумарну величину позовів у всіх трьох містах. Обчислити MS^3.

3.14. Страхова компанія уклала 100 договорів медичного страхування. Величина індивідуального позову за одним договором експоненціально розподілена з параметром 10^{-3}. Страхова премія p за договором перевищує на 100 середню величину позову. Обчислити ймовірність того, що сумарний позов до компанії перевищує внесені страхові премії.

3.15. Страхова компанія укладає договори страхування життя на один рік. Якщо смерть застрахованого настала внаслідок нещасного випадку, то нащадкам виплачують 1 000 000 грн. Якщо смерть застрахованого настала в результаті природних причин, то страхова виплата дорівнює 500 000 грн. Для кожного із застрахованих імовірність смерті через нещасний випадок дорівнює 0,01, ймовірність смерті у зв'язку з природними причинами — 0,1. Позови за договорами незалежні. Відносна страхова надбавка $\theta = 0,2$. Визначити, скільки договорів необхідно укласти страховій компанії, щоб з імовірністю 0,95 сумарний позов до компанії не перевищував внесені страхові премії.

3.16. Портфель компанії складається з N договорів страхування. Імовірність подання позову за одним договором дорівнює 1/2, величина дійсно поданого позову дорівнює $1000\exp\{-0,05t\}$, де t — рівномірно розподілена на (0,20) випадкова величина. Відомо, що премія за окремим договором дорівнює 350, а загальна сума премій за портфелем договорів — середній величині сумарного позову плюс 1,25 стандартного відхилення сумарного позову від свого середнього. Знайти число N договорів, укладених компанією.

3.17. Величина позову X має експоненціальний розподіл з параметром $\lambda = 1$. Обчислити премію $p[X]$ за принципами математичного сподівання, дисперсії та експоненціальним принципом (параметр α відомий).

3.18. Величина позову X має пуассонів розподіл з параметром λ. Обчислити премію $p[X]$ за експоненціальним принципом.

3.19. Портфель страхової компанії складається з n незалежних полісів. Величина позову за кожним із них має пуассонів розподіл з параметром λ. Відносна страхова надбавка дорівнює α. Обчислити премію p для всього портфеля за принципами математичного сподівання, дисперсії та середньоквадратичного відхилення.

Розділ 4

Математична модель колективного ризику на малих проміжках часу

Модель колективного ризику застосовується для обчислення ймовірності банкрутства страхової компанії. Вона будується за таких припущень.

1) Аналізується фіксований короткий інтервал часу (так що можна знехтувати інфляцією і не враховувати прибуток від інвестування).

2) Плата за страховку вноситься на початку періоду страхування, розрахунок проводиться в кінці, надходжень протягом цього періоду немає.

3) Позови $Y_1, Y_2, \ldots$, що надходять до компанії, не пов'язані з конкретними договорами, а розглядаються як результат сумарного ризику компанії. Інакше кажучи, Y_i — i-й дійсно поданий позов, а не позов за i-м договором. Випадкові величини $Y_1, Y_2, \ldots$ — незалежні, однаково розподілені й не мають атома в нулі.

4) Випадкова величина ν — загальне число позовів за період страхування та випадкові величини $Y_1, Y_2, \ldots$ — незалежні.

У моделі колективного ризику, як і в моделі індивідуального, ймовірність банкрутства R на даному інтервалі часу визначається за сумарним позовом $S_\nu = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu$ до страхової компанії та її капіталом u:

$$R = P\{S_\nu > u\}.$$

4.1. Розрахунок імовірності банкрутства

Щоб обчислити ймовірність банкрутства $R = P\{S_\nu > u\}$, застосуємо формулу повної імовірності:

$$R = P\{S_\nu > u\} = P\{S_\nu > u, \bigcup_{n=0}^{\infty}\{\nu = n\}\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{S_\nu > u, \nu = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n > u,\ \nu = n\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n > u\} \cdot P\{\nu = n\}$$

(зазначимо, що $P\{S_0 > u,\ \nu = 0\} = 0$).

Позначивши

$$P\{\nu = n\} = \pi_n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

імовірність банкрутства запишемо у вигляді

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n > u\}\pi_n. \tag{4.1.1}$$

Для обчислення ймовірності $P\{S_n > u\}$ знайдемо розподіл випадкової величини

$$S_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

як розподіл суми незалежних випадкових величин $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ (він дорівнює згортці розподілів доданків), а потім обчислимо $P\{S_n > u\}$.

Якщо випадкові величини Y_i дискретні (для визначеності будемо вважати, що Y_i набувають лише цілих значень), то для цілих u

$$P\{S_n > u\} = \sum_{k=u+1}^{\infty} P\{S_n = k\},$$

а ймовірність банкрутства (4.1.1) дорівнює

$$R = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=u+1}^{\infty} \pi_n P\{S_n = k\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\pi_n \sum_{k=u+1}^{\infty} P\{S_n = k\} =$$

$$= \sum_{k=u+1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n = k\}\pi_n.$$

Якщо випадкові величини Y_i абсолютно неперервні, то

$$P\{S_n > u\} = \int_u^{\infty} f_{S_n}(x)dx$$

($f_{S_n}(t)$ — щільність розподілу S_n), а ймовірність банкрутства (4.1.1)

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n > u\}\pi_n = \sum_{n=1}^{\infty}\pi_n \int_u^{\infty} f_{S_n}(x)dx =$$

$$= \int_u^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\pi_n f_{S_n}(x)\right)dx.$$

Приклад 4.1.1. *За фіксований короткий проміжок часу портфель договорів страхової компанії може породити 0, 1, 2 або 3 позови з імовірностями 0,2; 0,3; 0,4; 0,1 відповідно. У випадку, якщо позов поданий, його величина дорівнює 1, 2 або 3 з імовірностями 0,6; 0,3 та 0,1 відповідно. Визначити залежність імовірності банкрутства від капіталу компанії.*

Р о з в' я з а н н я. Спочатку знайдемо розподіли випадкових величин Y_1, $Y_1 + Y_2$, $Y_1 + Y_2 + Y_3$.

Кожна випадкова величина Y_i, $i = 1, 2, 3$ має розподіл

1	2	3
0,6	0,3	0,1

Спільним розподілом Y_1 та Y_2 є

Значення Y_1	Значення Y_2		
	1	2	3
1	0,36	0,18	0,06
2	0,18	0,09	0,03
3	0,06	0,03	0,01

Тоді розподіл суми $Y_1 + Y_2$ має вигляд

1	2	3	4	5	6
0	0,36	0,36	0,21	0,06	0,01

Спільний розподіл $Y_1 + Y_2$, Y_3 дорівнює

Значення Y_3	Значення $Y_1 + Y_2$					
	1	2	3	4	5	6
1	0	0,216	0,216	0,126	0,036	0,006
2	0	0,108	0,108	0,063	0,018	0,003
3	0	0,036	0,036	0,021	0,006	0,001

Розподілом суми $Y_1 + Y_2 + Y_3$ є

1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0,216	0,324	0,27	0,135	0,045	0,009	0,001

Розподілом числа позовів ν до страхової компанії є

0	1	2	3
0,2	0,3	0,4	0,1

Знайдемо розподіл сумарного позову $S_\nu = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu$. Маємо

$$P\{S_\nu = k\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n = k\}\pi_n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = k\}P\{\nu = n\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 9.$$

Звідси одержимо

$$P\{S_\nu = 0\} = P\{\nu = 0\} = 0,2;$$

$$P\{S_\nu = 1\} = P\{Y_1 = 1\}P\{\nu = 1\} + P\{Y_1 + Y_2 = 1\}P\{\nu = 2\}+$$

$$+P\{Y_1+Y_2+Y_3 = 1\}P\{\nu = 3\} = 0,6 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,1 = 0,18;$$

$$P\{S_\nu = 2\} = P\{Y_1 = 2\}P\{\nu = 1\} + P\{Y_1 + Y_2 = 2\}P\{\nu = 2\}+$$

$$+P\{Y_1+Y_2+Y_3 = 2\}P\{\nu = 3\} = 0,3 \cdot 0,3 + 0,36 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,1 = 0,234;$$

$$P\{S_\nu = 3\} = 0,1 \cdot 0,3 + 0,36 \cdot 0,4 + 0,216 \cdot 0,1 = 0,1956;$$

$$P\{S_\nu = 4\} = 0 \cdot 0,3 + 0,21 \cdot 0,4 + 0,324 \cdot 0,1 = 0,1164;$$

$$P\{S_\nu = 5\} = 0 \cdot 0,3 + 0,06 \cdot 0,4 + 0,27 \cdot 0,1 = 0,051;$$

$$P\{S_\nu = 6\} = 0 \cdot 0,3 + 0,01 \cdot 0,4 + 0,135 \cdot 0,1 = 0,0175;$$

$$P\{S_\nu = 7\} = 0 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,4 + 0,045 \cdot 0,1 = 0,0045;$$

$$P\{S_\nu = 8\} = 0 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,4 + 0,009 \cdot 0,1 = 0,0009;$$

$$P\{S_\nu = 9\} = 0 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,4 + 0,001 \cdot 0,1 = 0,0001.$$

Отже, розподіл S_ν дорівнює

k	$P\{S_\nu = k\}$	k	$P\{S_\nu = k\}$
0	0,2	5	0,0510
1	0,18	6	0,0175
2	0,234	7	0,0045
3	0,1956	8	0,0009
4	0,1164	9	0,0001

Знаючи розподіл S_ν, обчислимо ймовірність банкрутства R:

$$R = P\{S_\nu > u\} = \sum_{k=u+1}^{\infty} P\{S_\nu = k\}.$$

Для u, що дорівнює відповідно $0, 1, \ldots, 9$, маємо

u	$R(u)$	u	$R(u)$
0	0,8	5	0,0230
1	0,62	6	0,0055
2	0,386	7	0,0010
3	0,1904	8	0,0001
4	0,074	9	0

Приклад 4.1.2. *Нехай число позовів ν за фіксований проміжок часу має геометричний розподіл із параметром p :*

$$\pi_n = P\{\nu = n\} = p^n(1-p), \ \ n = 0, 1, \ldots$$

а величини позовів розподілені показниково з параметром λ :

$$F_{Y_i}(x) = P\{Y_i < x\} = \begin{cases} 0, & \textit{при } x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \textit{при } x \geq 0 \ \ (\lambda > 0). \end{cases}$$

Знайти залежність імовірності банкрутства від капіталу компанії.

Р о з в' я з а н н я. Випадкова величина

$$S_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

як сума незалежних показниково розподілених випадкових величин із параметром λ має гамма-розподіл із параметрами (n, λ) :

$$f_{S_n}(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0; \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0 \ \ (\lambda > 0). \end{cases}$$

Тому щільність сумарного позову при $x \geq 0$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n f_{S_n}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p^n (1-p) \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} =$$

$$= (1-p)p\lambda e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} = (1-p)p\lambda e^{-\lambda(1-p)x}.$$

Отже,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0; \\ p(1-p)\lambda e^{-\lambda(1-p)x}, & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Імовірність банкрутства компанії дорівнює

$$R = \int_u^{\infty} f(x)dx = \int_u^{\infty} p(1-p)\lambda e^{-\lambda(1-p)x} dx = pe^{-\lambda(1-p)u}.$$

Числові характеристики сумарного позову. Нехай $\pi(z)$ — генератриса числа позовів ν:

$$\pi(z) = Mz^{\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P\{\nu = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \pi_n,$$

а $\varphi(s)$ — перетворення Лапласа величини Y_i поданого позову:

$$\varphi(s) = Me^{-sY_i} = \int_0^{+\infty} e^{-sx} F_{Y_i}(dx)$$

(F_{Y_i} — розподіл випадкової величини Y_i). Оскільки випадкові величини Y_i однаково розподілені, то $\varphi(s)$ не залежить від номера позову.

Знайдемо перетворення Лапласа $\Phi(s)$ сумарного позову S_ν:

$$\Phi(s) = Me^{-sS_\nu} = M\left(e^{-sS_\nu}, \bigcup_{n=0}^{\infty}\{\nu = n\}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} M(e^{-sS_\nu}, \{\nu = n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} M(e^{-sS_n}, \{\nu = n\}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} Me^{-sS_n} I_{\{\nu=n\}} = \sum_{n=0}^{\infty} Me^{-sS_n} MI_{\{\nu=n\}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{n} Me^{-sY_i}\right) P\{\nu = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi(s))^n \pi_n = \pi(\varphi(s))$$

(скористалися тим, що випадкові величини ν, $Y_1, Y_2, \ldots$ незалежні). Отже,

$$\Phi(s) = Me^{-sS_\nu} = \pi(\varphi(s)). \qquad (4.1.2)$$

Якщо подані позови Y_i мають дискретний розподіл, то сумарний позов S_ν також дискретний. Знайдемо його генератрису $G(z)$.

Генератриса випадкової величини Y_i дорівнює

$$g(z) = Mz^{Y_i} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P\{Y_i = n\}.$$

Генератриса числа позовів ν дорівнює $\pi(z)$. Тоді генератриса сумарного позову S_ν є

$$G(z) = Mz^{S_\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} M(z^{S_\nu}, \{\nu = n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} M(z^{S_n}, \{\nu = n\}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} Mz^{S_n} I_{\{\nu=n\}} = \sum_{n=0}^{\infty} Mz^{S_n} MI_{\{\nu=n\}} = \sum_{n=0}^{\infty} Mz^{S_n} P\{\nu = n\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(M \prod_{j=1}^{n} z^{Y_j} \right) P\{\nu = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{n} Mz^{Y_j} \right) P\{\nu = n\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (g(z))^n P\{\nu = n\} = \pi(g(z)),$$

тобто

$$G(z) = \pi(g(z)). \tag{4.1.3}$$

М а т е м а т и ч н е с п о д і в а н н я с у м а р н о г о п о з о в у S_ν. З формули (4.1.2) маємо

$$\Phi'(s) = \pi'(\varphi(s))\varphi'(s),$$

$$\Phi'(0) = \pi'(\varphi(0))\varphi'(0) = \pi'(1)\varphi'(0),$$

але $\Phi'(0) = -MS_\nu$, $\varphi'(0) = -MY_i$. Отже,

$$MS_\nu = M\nu MY_i. \tag{4.1.4}$$

Д и с п е р с і я с у м а р н о г о п о з о в у S_ν. Із формули (4.1.2) маємо

$$\Phi''(s) = \pi''(\varphi(s))(\varphi'(s))^2 + \pi'(\varphi(s))\varphi''(s),$$

$$\Phi''(0) = \pi''(\varphi(0))(\varphi'(0))^2 + \pi'(\varphi(0))\varphi''(0) =$$

$$= \pi''(1)(\varphi'(0))^2 + \pi'(1)\varphi''(0) = (M\nu^2 - M\nu)(\varphi'(0))^2 + M\nu\varphi''(0),$$

але

$$\Phi''(0) = MS_\nu^2, \quad \varphi'(0) = -MY_i, \quad \varphi''(0) = MY_i^2.$$

Тому

$$MS_\nu^2 = (M\nu^2 - M\nu)(-MY_i)^2 + M\nu MY_i{}^2.$$

Звідси випливає

$$DS_\nu + (MS_\nu)^2 = (D\nu + (M\nu)^2 - M\nu)(MY_i)^2 + M\nu(DY_i + (MY_i)^2),$$

$$DS_\nu + (M\nu \cdot MY_i)^2 = D\nu \cdot (MY_i)^2 + (M\nu \cdot MY_i)^2 - M\nu \cdot (MY_i)^2 +$$
$$+ M\nu \cdot DY_i + M\nu \cdot (MY_i)^2.$$

Отже,

$$DS_\nu = D\nu(MY_i)^2 + DY_i M\nu. \tag{4.1.5}$$

Формули (4.1.4) та (4.1.5) іншим методом знайдені в підрозділі 1.2.

Описуючи модель колективного ризику, ми не робили припущень щодо розподілу числа позовів ν та розподілу величини Y_i поданого позову. Але ці розподіли не довільні. Реальні статистичні дані щодо характеру надходження позовів показують, що число позовів ν адекватно описується пуассоновим або від'ємним біномним розподілом, а величина Y_i поданого позову — розподілом Парето, розподілом Парето з нульовою точкою, гамма-розподілом, логнормальним розподілом, логарифмованим логістичним розподілом, логарифмованим розподілом Лапласа, розподілом Вейбулла.

Приклад 4.1.3. *У моделі колективного ризику розподіл сумарного позову до страхової компанії $S_\nu = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu$ задається розподілом числа позовів ν*

$$P\{\nu = n\} = C_{n+3}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+4}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

та щільністю розподілу величини поданого позову Y_i

$$f(x) = 4xe^{-2x}, \quad x > 0.$$

Обчислити математичне сподівання та дисперсію сумарного позову S_ν.

Р о з в' я з а н н я. Перетворення Лапласа $\Phi(s)$ сумарного позову S_ν дорівнює

$$\Phi(s) = \pi(\varphi(s)),$$

де $\pi(z)$ — генератриса числа позовів ν

$$\pi(z) = Mz^\nu = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n C_{n+3}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+4} = \frac{1}{16}\left(1 - \frac{z}{2}\right)^{-4},$$

$\varphi(s)$ — перетворення Лапласа величини поданого позову Y_i

$$\varphi(s) = Me^{-sY_i} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-sx} 4xe^{-2x} dx = \frac{4}{(2+s)^2},$$

тоді перетворення Лапласа $\Phi(s)$ сумарного позову S_ν

$$\Phi(s) = \pi(\varphi(s)) = \frac{1}{16}(1 - 2(2+s)^{-2})^{-4}.$$

Математичне сподівання сумарного позову S_ν знаходимо диференціюванням $\Phi(s)$ за s у точці нуль: $MS_\nu = -\Phi'(0) = 4$. Аналогічно $MS_\nu^2 = \Phi''(0) = 26$. Дисперсія сумарного позову $DS_\nu = 10$.

4.2. Складений пуассонів розподіл

За великого числа N договорів у портфелі й малої ймовірності p подання позову розподіл числа позовів ν можна вважати пуассоновим:

$$\pi_i = P\{\nu = i\} = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \quad i = 0, 1, \ldots$$

Якщо Y_i $(i = 1, 2, \ldots)$ — величина i-го поданого позову, то величина сумарного позову дорівнює

$$S_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} Y_i.$$

Означення. Нехай $Y_i, i = 1, 2, \ldots$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини, кожна з функцією розподілу $F(x)$, ν — пуассонова випадкова величина з параметром λ, ν не залежить від випадкових величин $Y_1, Y_2, \ldots$ Розподіл випадкової величини

$$S_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} Y_i$$

називатимемо *складеним пуассоновим розподілом* із параметрами $(\lambda, F(x))$.

Перетворення Лапласа $\Phi(s)$ випадкової величини S_ν дорівнює

$$\Phi(s) = Me^{-sS_\nu} = \pi(\varphi(s)) = e^{\lambda(\varphi(s)-1)}$$

[див. формулу (4.1.2)], де

$$\pi(z) = Mz^\nu = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{\lambda(z-1)}$$

— генератриса числа позовів ν, $\varphi(s)$ — перетворення Лапласа випадкової величини Y_i.

Це дає можливість дати таке рівносильне означення складеного пуассонового розподілу.

Означення. Невід'ємна випадкова величина S_ν має *складений пуассонів розподіл*, якщо її перетворення Лапласа $\Phi(s)$ можна подати у вигляді

$$\Phi(s) = e^{\lambda(\varphi(s)-1)},$$

де $\varphi(s)$ — перетворення Лапласа деякого ймовірнісного розподілу F, зосередженого на $[0, +\infty)$.

Моменти складеного пуассонового розподілу. Математичне сподівання MS_ν та дисперсія DS_ν дорівнюють [див. рівності (4.1.4), (4.1.5)]

$$MS_\nu = M\nu MY_i = \lambda MY_i,$$

$$DS_\nu = D\nu(MY_i)^2 + DY_i M\nu = \lambda(DY_i + (MY_i)^2) = \lambda MY_i^2.$$

Обчислимо третій центральний момент $M(S_\nu - MS_\nu)^3$:

$$M(S_\nu - MS_\nu)^3 = MS_\nu^3 - 3MS_\nu^2 MS_\nu + 3MS_\nu(MS_\nu)^2 - (MS_\nu)^3 =$$

$$= MS_\nu^3 - 3MS_\nu(MS_\nu^2 - (MS_\nu)^2) - (MS_\nu)^3 =$$

$$= MS_\nu^3 - 3MS_\nu DS_\nu - (MS_\nu)^3.$$

Оскільки

$$MS_\nu^3 = -\Phi'''(0) = -\lambda\varphi'''(0) - 3\lambda^2\varphi'(0)\varphi''(0) - (\lambda\varphi'(0))^3 =$$

$$= \lambda MY_i^3 + 3\lambda^2 MY_i MY_i^2 + \lambda^3 (MY_i)^3,$$

то

$$M(S_\nu - MS_\nu)^3 = \lambda MY_i^3 + 3\lambda^2 MY_i MY_i^2 + \lambda^3 (MY_i)^3 - 3\lambda MY_i \lambda MY_i^2 -$$

$$-(\lambda MY_i)^3 = \lambda MY_i^3.$$

Як відомо, асиметрія випадкової величини S_ν дорівнює

$$\gamma = \frac{M(S_\nu - MS_\nu)^3}{(DS_\nu)^{3/2}}.$$

Якщо $M(S_\nu - MS_\nu)^3 = 0$, а отже, $\gamma = 0$, то розподіл симетричний відносно математичного сподівання. Якщо $M(S_\nu - MS_\nu)^3 > 0$, а отже, $\gamma > 0$, то розподіл має додатну асиметрію відносно математичного сподівання. Якщо $M(S_\nu - MS_\nu)^3 < 0$, а отже, $\gamma < 0$, то розподіл має від'ємну асиметрію відносно математичного сподівання. Зазначимо, що розподіл величини сумарного позову $S_\nu = Y_1 + \cdots + Y_\nu$ має додатну асиметрію $\gamma = 1/\sqrt{\lambda}$.

Розглянемо деякі властивості складеного пуассонового розподілу.

Теорема 4.2.1. *Нехай $S_1, S_2, \ldots$ — незалежні випадкові величини, кожна з яких має складений пуассонів розподіл відповідно з параметрами $(\lambda_1, F_1(x))$, $(\lambda_2, F_2(x)), \ldots$, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i$ збігається. Тоді сума*

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} S_i$$

має складений пуассонів розподіл із параметрами $(\lambda, F(x))$, де

$$\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i, \quad F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda} F_i(x).$$

Доведення. Нехай $\varphi_i(s) = \int\limits_0^{\infty} e^{-sx} F_i(dx)$ — перетворення Лапласа розподілу $F_i, i = 1, 2, \ldots$ Знайдемо перетворення Лапласа $\Phi(s)$ випадкової величини S:

$$\Phi(s) = M \exp\left\{-s \sum_{i=1}^{\infty} S_i\right\} = M \prod_{i=1}^{\infty} \exp\{-sS_i\} =$$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} M \exp\{-sS_i\} = \prod_{i=1}^{\infty} \exp\{\lambda_i(\varphi_i(s) - 1)\} =$$

$$= \exp\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(\varphi_i(s) - 1)\right\} = \exp\left\{\lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda} \varphi_i(s) - \lambda\right\}.$$

Функція $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (\lambda_i/\lambda)\varphi_i(s)$ є перетворенням Лапласа розподілу F:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-sx} F(dx) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-sx} d\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda} F_i(x)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda} \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-sx} F_i(dx)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda} \varphi_i(s),$$

а отже, $\exp\left\{\lambda\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda} \varphi_i(s) - 1\right)\right\}$ є перетворенням Лапласа складеного пуассонового розподілу з параметрами $(\lambda, F(x))$.

Отже, з одного боку, функція

$$\Phi(s) = \exp\left\{\lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda} \varphi_i(s) - \lambda\right\}$$

є перетворенням Лапласа складеного пуассонового розподілу з параметрами $(\lambda, F(x))$, з іншого боку, $\Phi(s)$ є перетворенням Лапласа випадкової величини S. Тому за теоремою єдиності випадкова величина $S = \sum\limits_{i=1}^{\infty} S_i$ має складений пуассонів розподіл з параметрами $(\lambda, F(x))$.

Теорема доведена.

Теорему в термінах моделі колективного ризику можна інтерпретувати так. Припустимо, що є кілька незалежних груп договорів страхування. Число позовів у i-й групі має пуассонів розподіл з параметром λ_i, а величина поданого позову має функцію розподілу $F_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots$ Об'єднаємо всі договори в один портфель договорів. Тоді число позовів "сумарного" портфеля договорів має розподіл Пуассона із середнім $\lambda = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i$, а величина поданого позову має функцію розподілу

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i/\lambda) F_i(x).$$

Теорема 4.2.2. *Нехай випадкова величина S має складений пуассонів розподіл із параметрами $(\lambda,\ F(x))$. Якщо розподіл F можна подати у вигляді суміші розподілів F_i з вагами $p_1, p_2, \ldots$ $(p_i > 0, \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1)$:*

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i F_i(x),$$

то розподіл випадкової величини S збігається з розподілом суми $\sum\limits_{i=1}^{\infty} S_i$ незалежних випадкових величин $S_1, S_2, \ldots$, кожна з яких має складений пуассонів розподіл відповідно з параметрами $(\lambda p_i, F_i(x))$.

Доведення. Розглянемо незалежні випадкові величини $S_1, S_2, \ldots$, кожна з яких має складений пуассонів розподіл відповідно з параметрами $(\lambda p_1, F_1(x))$, $(\lambda p_2, F_2(x)), \ldots$ Оскільки ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda p_i = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} p_i = \lambda$$

збігається, то згідно з теоремою 4.2.1 сума $\sum\limits_{i=1}^{\infty} S_i$ має складений пуассонів розподіл із параметрами $(\lambda, F(x))$, де

$$\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i, \quad F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i F_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda p_i}{\lambda} F_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda} F_i(x),$$

а тому збігається з розподілом випадкової величини S.

Теорема доведена.

Згідно з теоремою 4.2.2 вихідний портфель договорів можна розбити на декілька незалежних портфелів. Для цих портфелів розподіл величини сумарного позову часто обчислити простіше,

ніж для вихідного. Розподіл величини сумарного позову вихідного портфеля знаходимо як згортку розподілів позовів незалежних портфелів.

Ефективний метод розрахунку складеного пуассонового розподілу у випадку дискретних Y_i можна одержати за допомогою такої теореми.

Теорема 4.2.3. *Нехай Y_i, $i = 1, 2, \ldots$ — незалежні однаково розподілені дискретні випадкові величини з розподілом*

$$P\{Y_i = n\} = p_n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

ν — пуассонова випадкова величина з параметром λ, незалежна від випадкових величин Y_i. Тоді розподіл P_n, $n = 0, 1, \ldots$ випадкової величини

$$S_\nu = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu$$

задовольняє рекурентні формули

$$P_n = \frac{\lambda}{n} \sum_{i=1}^{n} i p_i P_{n-i}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad P_0 = e^{-\lambda};$$

$$P_n = 0 \ \text{для} \ n < 0.$$

Доведення. Оскільки Y_i — дискретні випадкові величини, то складений пуассонів розподіл є дискретним і його генератриса дорівнює

$$G(z) = \pi(g(z)) = e^{\lambda(g(z)-1)},$$

де $g(z)$ — генератриса Y_i. За означенням генератриси

$$G(z) = Mz^{S_\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P\{S_\nu = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_n,$$

тобто $G(z)$ є генератрисою послідовності $\{P_n\}$. Здиференціюємо $G(z)$ за z:

$$G'(z) = \lambda g'(z) e^{\lambda g(z) - \lambda} = \lambda g'(z) G(z), \tag{4.2.1}$$

$$G'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1} P_n.$$

З останньої рівності маємо

$$zG'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nz^n P_n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n (nP_n),$$

тобто $zG'(z)$ — генератриса послідовності $\{nP_n\}$.

Функція

$$g(z) = Mz^{Y_i} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P\{Y_i = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n$$

є генератрисою послідовності $\{p_n\}$. Здиференціюємо $g(z)$ за z:

$$g'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1} p_n.$$

Помноживши праву й ліву частини останньої рівності на λz, одержимо

$$\lambda z g'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n (\lambda n p_n),$$

тобто $\lambda z g'(z)$ є генератрисою послідовності $\{\lambda n p_n\}$. Із рівності (4.2.1) маємо

$$zG'(z) = \lambda z g'(z) G(z). \tag{4.2.2}$$

Тому функція $zG'(z)$ як добуток генератрис послідовностей $\{P_n\}$ і $\{\lambda n p_n\}$ є генератрисою згортки цих послідовностей. Отже, із рівності (4.2.2) одержимо для $n \geq 1$

$$nP_n = \sum_{i=0}^{n} (\lambda i p_i) P_{n-i},$$

або

$$P_n = \frac{\lambda}{n} \sum_{i=0}^{n} i p_i P_{n-i}.$$

При $n = 0$ маємо

$$P_0 = P\{S_\nu = 0\} = P\{\nu = 0\} = e^{-\lambda},$$

а при $n < 0$

$$P_n = 0.$$

Приклад 4.2.1. *За фіксований короткий проміжок часу число позовів ν до страхової компанії має пуассонів розподіл з параметром $\lambda = 0,8$. У випадку, якщо позов поданий, його величина дорівнює 1 або 2 або 3 з імовірностями $0,25$; $0,375$ та $0,375$ відповідно. Обчислити розподіл сумарного позову $S_\nu = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu$ до компанії.*

Р о з в' я з а н н я. Перший спосіб. Спочатку знайдемо розподіл кожної з випадкових величин Y_1,$Y_1 + Y_2$, $Y_1 + Y_2 + Y_3$ і т.д.

Випадкові величини $Y_i, i = 1, 2, \ldots$ мають розподіл

1	2	3
0,25	0,375	0,375

Тоді розподіл суми $Y_1 + Y_2$ знаходимо як згортку розподілів Y_1 та Y_2 — він наведений нижче:

2	3	4	5	6
0,0625	0,1875	0,3281	0,2813	0,1406

Розподіл суми $Y_1 + Y_2 + Y_3$ такий:

3	4	5	6	7	8	9
0,0156	0,0703	0,1758	0,2637	0,2637	0,1582	0,0527

Розподіл суми $Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$ має вигляд

4	0,0039	9	0,2373
5	0,0234	10	0,1714
6	0,0762	11	0,0791
7	0,1582	12	0,0198
8	0,2307		

Розподіл суми $Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5$

5	0,001	11	0,2184
6	0,0073	12	0,1730
7	0,0293	13	0,0989
8	0,0769	14	0,0371
9	0,1456	15	0,0074
10	0,2052		

Розподілом числа позовів ν до страхової компанії є пуассонів розподіл з параметром $\lambda = 0,8$:

$$\pi_i = P\{\nu = i\} = \frac{(0,8)^i}{i!} e^{-0,8}, \; i = 0, 1, \ldots \text{ або, що те саме,}$$

0	1	2	3	4	5	...
0,4493	0,3595	0,1438	0,0383	0,0077	0,0012	...

Тоді розподілом сумарного позову $S_\nu = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu$ є складений пуассонів розподіл. Знайдемо його. Маємо

$$P\{S_\nu = k\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n = k\}\pi_n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = k\}P\{\nu = n\}, \; k = 0, 1, \ldots$$

Звідси одержимо

$$P\{S_\nu = 0\} \approx 0,4493; \quad P\{S_\nu = 1\} \approx 0,08987;$$

$$P\{S_\nu = 2\} \approx 0,14379; \quad P\{S_\nu = 3\} \approx 0,16236;$$

$$P\{S_\nu = 4\} \approx 0,04991; \quad P\{S_\nu = 5\} \approx 0,04736;$$

і т.д.

Отже, розподіл S_ν дорівнює

0	1	2	3	4	5	...
0,4493	0,08987	0,14379	0,16236	0,04991	0,04736	...

Другий спосіб. Сумарний позов до компанії можна подати у вигляді

$$S_\nu = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu = 1\nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3,$$

де ν_1 — число позовів величини 1, ν_2 — число позовів величини 2, ν_3 — число позовів величини 3. Випадкові величини ν_1, ν_2, ν_3 мають пуассонові розподіли з параметрами

$$\lambda_1 = \lambda P\{Y_i = 1\} = 0,2;$$

$$\lambda_2 = \lambda P\{Y_i = 2\} = 0,3;$$

$$\lambda_3 = \lambda P\{Y_i = 3\} = 0,3$$

відповідно.

Розподілом числа позовів ν_1 величини 1 є

0	1	2	3	4	...
0,8187	0,1637	0,0164	0,0011	0,0001	...

або $\dfrac{(0,2)^i}{i!} e^{-0,2}, \; i = 0, 1, 2, \ldots$

Розподілом $2\nu_2$ — числа позовів величини 2, помноженого на 2, є

0	2	4	6	...
0,7408	0,2222	0,0333	0,0033	...

або $\dfrac{(0,3)^{i/2}}{(i/2)!} e^{-0,3}, \; i = 0, 2, 4, \ldots$

Розподілом $3\nu_3$ — числа позовів величини 3, помноженого на 3, є

0	3	6	...
0,7408	0,2222	0,0333	...

або $\dfrac{(0,3)^{i/3}}{(i/3)!} e^{-0,3}, \; i = 0, 3, 6, \ldots$

Знайдемо розподіл $S_\nu = \nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3$ як згортку розподілів $\nu_1 + 2\nu_2$ і $3\nu_3$. Розподілом суми $\nu_1 + 2\nu_2$ є

0	1	2	3	4	5	6	...
0,6065	0,1213	0,1941	0,0372	0,0310	0,0057	0,0033	...

Тому розподіл сумарного позову $S_\nu = \nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3$ дорівнює

0	1	2	3	4	5	6	...
0,4493	0,08987	0,14379	0,16236	0,04991	0,04736	0,03092	...

Третій спосіб. Застосуємо рекурентні формули для розрахунку складеного пуассонового розподілу:

$$P_n = \frac{\lambda}{n} \sum_{i=1}^{n} i p_i P_{n-i}, \; n = 1, 2, \ldots, \; P_0 = e^{-\lambda},$$

де $P\{Y_i = k\} = p_k, \; k = 0, 1, \ldots$

Маємо

$$P_0 = e^{-0,8} \approx 0,4493;$$

$$P_1 = 0,8 \cdot p_1 P_0 \approx 0,08987;$$

$$P_2 = \frac{0,8}{2}(p_1P_1 + 2p_2P_0) \approx 0,14379;$$

$$P_3 = \frac{0,8}{3}(p_1P_2 + 2p_2P_1 + 3p_3P_0) \approx 0,16236;$$

$$P_4 = \frac{0,8}{4}(p_1P_3 + 2p_2P_2 + 3p_3P_1 + 4p_4P_0) \approx 0,04991;$$

$$P_5 = \frac{0,8}{5}(p_1P_4 + 2p_2P_3 + 3p_3P_2 + 4p_4P_1 + 5p_5P_0) \approx 0,04736;$$

і т.д.

4.3. Складений від'ємний біномний розподіл

Середнє число позовів λ, як правило, залежить від випадкових факторів, тому λ можна вважати випадковою величиною з деякою щільністю $f_\lambda(x)$.

Нехай число позовів ν за даний інтервал часу має розподіл Пуассона з параметром λ. Нехай параметр λ має гамма-розподіл із параметрами $(\beta;\alpha)$. Тоді розподіл числа позовів ν називають *рандомізованим розподілом Пуассона,* який є від'ємним біномним розподілом із параметрами $\left(\frac{\beta}{\beta+1};\alpha\right)$:

$$\pi_i = P\{\nu = i\} = C^i_{i+\alpha-1}\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^\alpha \left(1-\frac{\beta}{\beta+1}\right)^i, \quad i = 0,1,\dots \tag{4.3.1}$$

Якщо α неціле, то $C^i_{i+\alpha-1}$ визначають так:

$$C^i_{i+\alpha-1} = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+i-1)}{i!}.$$

Якщо позначити $p = \beta/(\beta+1)$, $q = 1/(\beta+1)$, то рівність (4.3.1) запишеться так:

$$\pi_i = P\{\nu = i\} = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+i-1)}{i!}\,q^ip^\alpha \ \ (p+q=1).$$

Від'ємний біномний розподіл адекватно описує розподіл числа позовів ν, коли дисперсія $D\nu$ перевищує середнє $M\nu$.

Означення. Нехай Y_i, $i = 1,2,\dots$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини, кожна з функцією розподілу $F(x)$, випадкова величина ν має від'ємний біномний розподіл з параметрами (p,α) і ν не залежить від випадкових величин $Y_1, Y_2,\dots$ Розподіл випадкової величини

$$S_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} Y_i$$

називається *складеним від'ємним біномним розподілом* із параметрами $(p;\alpha;F(x))$.

Перетворення Лапласа $\Phi(s)$ випадкової величини S_ν дорівнює

$$\Phi(s) = Me^{-sS_\nu} = \pi(\varphi(s)) = \left(\frac{p}{1-\varphi(s)q}\right)^\alpha,$$

де

$$\pi(z) = Mz^\nu = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)}{k!}\,q^kp^\alpha =$$

$$= p^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(-\alpha)(-\alpha-1)\cdots(-\alpha-k+1)}{k!}(zq)^k = p^\alpha(1-zq)^{-\alpha} =$$

$$= \left(\frac{p}{1-zq}\right)^\alpha$$

— генератриса числа позовів, $\varphi(s)$ — перетворення Лапласа випадкової величини Y_i. Тому можна дати рівносильне означення складеного від'ємного біномного розподілу.

Означення. Невід'ємна випадкова величина S_ν має *складений від'ємний біномний розподіл із параметрами* $(p;\alpha;F(x))$, якщо її перетворення Лапласа $\Phi(s)$ можна подати у вигляді

$$\Phi(s) = \left(\frac{p}{1-\varphi(s)q}\right)^\alpha,$$

де $\varphi(s)$ — перетворення Лапласа деякого ймовірнісного розподілу F, зосередженого на $[0,+\infty)$, $p>0$, $q>0$, $p+q=1$.

Якщо індивідуальні позови Y_i мають дискретний розподіл із генератрисою $g(z)$, то складений від'ємний біномний розподіл також є дискретним і його генератриса дорівнює

$$G(z) = \pi(g(z)) = \left(\frac{p}{1-g(z)q}\right)^\alpha.$$

Обчислимо моменти складеного від'ємного біномного розподілу. Математичне сподівання MS_ν та дисперсія DS_ν сумарного позову S_ν дорівнюють

$$MS_\nu = M\nu MY_i = \frac{\alpha q}{p} MY_i,$$

$$DS_\nu = D\nu (MY_i)^2 + DY_i M\nu = \frac{\alpha q}{p^2}(MY_i)^2 + DY_i \frac{\alpha q}{p},$$

[див. рівності (4.1.4), (4.1.5)], третій центральний момент сумарного позову S_ν дорівнює

$$M(S_\nu - MS_\nu)^3 = \frac{\alpha q}{p} MY_i^3 + \frac{3\alpha q^2}{p^2} MY_i \cdot MY_i^2 + \frac{2\alpha q^3}{p^3}(MY_i)^3.$$

Як і для складеного пуассонового розподілу, у моделі складеного від'ємного біномного розподілу сумарний позов S_ν завжди має додатну асиметрію.

Кожен складений від'ємний біномний розподіл можна розглядати як складений пуассонів розподіл зі спеціально підібраними параметрами.

Теорема 4.3.1. *Складений від'ємний біномний розподіл із параметрами $(p; \alpha; F(x))$ збігається зі складеним пуассоновим розподілом з параметрами $(\lambda; H(x))$, де*

$$\lambda = -\alpha \ln(1-q), \;\; H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n F_n(x),$$

$$F_n = \underbrace{F * \cdots * F}_{n}, \quad p_n = -\frac{q^n}{n \ln(1-q)}, \;\; n = 1, 2, \ldots,$$

$$p + q = 1, \;\; p > 0, \;\; q > 0.$$

Доведення. Розглянемо розклад у ряд функції $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1.$$

Для $x = -q$ маємо

$$\ln(1+(-q)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-q)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1} \frac{q^n}{n}, \; |q| < 1.$$

Звідси

$$-\ln(1-q) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n} \frac{q^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n}, \; |q| < 1,$$

отже,

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{q^n}{n \ln(1-q)}, \; |q| < 1.$$

Позначимо

$$p_n = -\frac{q^n}{n \ln(1-q)}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Величини p_n додатні й $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n = 1$. Тому їх можна розглядати як розподіл деякої цілочислової випадкової величини μ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n & \ldots \end{pmatrix}.$$

Генератриса μ дорівнює

$$\pi_\mu(z) = Mz^\mu = \sum_{n=1}^{\infty} z^n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \left(-\frac{q^n}{n \ln(1-q)} \right) =$$

$$= -\frac{1}{\ln(1-q)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(zq)^n}{n} = \frac{\ln(1-zq)}{\ln(1-q)}.$$

Розглянемо зважену суму функцій розподілу $F_n(x)$ з вагами p_n :

$$H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n F_n(x).$$

Зазначимо, що $H(x)$ є функцією розподілу випадкової величини

$$Z = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_\mu,$$

де випадкові величини Y_i незалежні, кожна з функцією розподілу $F(x)$, μ не залежить від Y_i.

Перетворення Лапласа φ_H функції $H(x)$ згідно з рівністю (4.1.2) дорівнює

$$\varphi_H(s) = Me^{-sZ} = \pi_\mu(\varphi(s)) = \frac{\ln(1-q\varphi(s))}{\ln(1-q)},$$

де $\varphi(s)$ — перетворення Лапласа розподілу F.

Обчислимо перетворення Лапласа складеного пуассонового розподілу з параметрами $\lambda = -\alpha\ln(1-q)$ і $H(x)$:

$$\Phi(s) = \exp\{\lambda(\varphi_H(s)-1)\} =$$

$$= \exp\left\{-\alpha\ln(1-q)\left(\frac{\ln(1-q\varphi(s))}{\ln(1-q)}-1\right)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\alpha\ln\frac{1-q}{1-q\varphi(s)}\right\} = \left(\frac{1-q}{1-q\varphi(s)}\right)^\alpha = \left(\frac{p}{1-q\varphi(s)}\right)^\alpha.$$

Ця функція є перетворенням Лапласа складеного від'ємного біномного розподілу. Оскільки перетворення Лапласа однакові, то складений від'ємний біномний розподіл із параметрами $(p;\alpha;F(x))$ збігається зі складеним пуассоновим розподілом із параметрами $(\lambda; H(x))$.

Теорема доведена.

Складений від'ємний біномний розподіл має властивості, аналогічні до властивостей складеного пуассонового розподілу.

Теорема 4.3.2. *Нехай Y_i, $i = 1,2,\ldots$ — незалежні однаково розподілені дискретні випадкові величини з розподілом*

$$P\{Y_i = n\} = p_n,\ n = 0,1,\ldots,$$

випадкова величина ν має від'ємний біномний розподіл із параметрами (p,α). Тоді розподіл P_n, $n = 0,1,\ldots$ випадкової величини

$$S_\nu = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu$$

задовольняє рекурентні формули

$$P_n = \sum_{i=1}^{n}\left(q + \frac{(\alpha-1)q}{n}\,i\right)p_iP_{n-i},\ \ n = 1,2,\ldots$$

$$P_0 = p^\alpha;\quad P_n = 0 \quad \textit{для} \quad n < 0.$$

Доведення. Оскільки Y_i — дискретні випадкові величини, то складений від'ємний біномний розподіл також є дискретним і його генератриса дорівнює

$$G(z) = \pi(g(z)) = \left(\frac{p}{1-qg(z)}\right)^\alpha,$$

де $g(z)$ — генератриса Y_i. Здиференціюємо $G(z)$ за z:

$$G'(z) = \alpha\left(\frac{p}{1-qg(z)}\right)^{\alpha-1}\frac{(-p)(-q)g'(z)}{(1-qg(z))^2} = \alpha\frac{qg'(z)}{1-qg(z)}G(z).$$

Звідси випливає, що

$$G'(z)(1-qg(z)) = \alpha qg'(z)G(z),$$

$$zG'(z) - qg(z)zG'(z) = \alpha qzg'(z)G(z).$$

Розглянемо генератрису послідовності $\{P_n\}$:

$$G(z) = Mz^{S_\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} z^nP\{S_\nu = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^nP_n.$$

Здиференціювавши $G(z)$ за z, матимемо

$$G'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1}P_n.$$

З останньої рівності одержуємо

$$zG'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nz^nP_n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n(nP_n),$$

тобто $zG'(z)$ — генератриса послідовності $\{nP_n\}$.

Функція

$$g(z) = Mz^{Y_i} = \sum_{n=0}^{\infty} z^nP\{Y_i = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^np_n$$

є генератрисою послідовності $\{p_n\}$. Здиференціювавши $g(z)$ за z, одержимо

$$g'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1} p_n.$$

Помноживши праву й ліву частини останньої рівності на z, одержимо

$$zg'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n (np_n),$$

тобто $zg'(z)$ є генератрисою послідовності $\{np_n\}$. Функція $qg(z)zG'(z)$ як добуток генератрис послідовностей $\{qp_n\}$ і $\{nP_n\}$ є генератрисою згортки цих послідовностей. Функція $\alpha qzg'(z)G(z)$ як добуток генератрис послідовностей $\{\alpha qnp_n\}$ і $\{P_n\}$ є генератрисою згортки цих послідовностей. Тому з рівності

$$zG'(z) = qg(z)zG'(z) + \alpha qzg'(z)G(z)$$

випливає (для $n \geq 1$)

$$nP_n = q\sum_{i=0}^{n} p_i(n-i)P_{n-i} + \alpha q\sum_{i=0}^{n} ip_iP_{n-i},$$

$$nP_n = \sum_{i=0}^{n}(q(n-i) + \alpha qi)p_iP_{n-i},$$

$$P_n = \sum_{i=1}^{n}\left(q + \frac{(\alpha-1)q}{n}i\right)p_iP_{n-i}.$$

При $n = 0$ $P_0 = P\{S_\nu = 0\} = P\{\nu = 0\} = p^\alpha$, при $n < 0$ $P_n = 0$.

Теорема доведена.

4.4. Гауссове наближення для розрахунку ймовірності банкрутства

У моделі колективного ризику очікуване число позовів ν від усього портфеля договорів, як правило, велике.

Для складеного пуассонового розподілу це означає, що оскільки $M\nu = \lambda$, то параметр λ досить великий.

Для складеного від'ємного біномного розподілу $M\nu = \alpha q/p$. Тому $M\nu$ велике, якщо α велике або p мале. У цих випадках у разі точного розрахунку ймовірності банкрутства виникають проблеми, пов'язані з малим значенням ймовірностей. Тому для розрахунку ймовірності банкрутства застосовують наближені методи.

Як і для моделі індивідуального ризику, в моделі колективного ризику основним є гауссове або нормальне наближення.

Математичне сподівання і дисперсія сумарного позову S_ν дорівнюють

$$MS_\nu = M\nu MY_i,$$

$$DS_\nu = D\nu(MY_i)^2 + DY_iM\nu.$$

Теорема 4.4.1. *Нехай $Y_1, Y_2, \ldots$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини із середнім $MY_i = m < \infty$ і скінченними дисперсіями $DY_i = \sigma^2$, $i = 1, 2, \ldots$; ν — пуассонова випадкова величина з параметром λ, при цьому випадкові величини ν і $Y_1, Y_2, \ldots$ незалежні;*

$$S_\nu = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu.$$

Тоді при $\lambda \to \infty$ розподіл нормованої суми

$$\frac{S_\nu - MS_\nu}{\sqrt{DS_\nu}} = \frac{S_\nu - \lambda m}{\sqrt{\lambda(m^2 + \sigma^2)}} \tag{4.4.1}$$

збігається до нормального розподілу з параметрами $(0; 1)$, тобто:

$$P\left\{\frac{S_\nu - MS_\nu}{\sqrt{DS_\nu}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} dt, \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

Теорема 4.4.2. *Нехай $Y_1, Y_2, \ldots$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини із середніми $MY_i = m$ та скінченними дисперсіями $DY_i = \sigma^2$, $i = 1, 2, \ldots$; випадкова величина ν має від'ємний біномний розподіл із параметрами (p, α), при цьому випадкові величини ν і $Y_1, Y_2, \ldots$ незалежні; $S_\nu = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu$. Тоді при $\alpha \to \infty$ розподіл нормованої суми*

$$\frac{S_\nu - MS_\nu}{\sqrt{DS_\nu}} = \frac{S_\nu - \alpha qm/p}{\sqrt{\alpha qm^2/p^2 + \alpha q\,\sigma^2/p}} \tag{4.4.2}$$

збігається до нормального розподілу з параметрами $(0; 1)$.

Отже, можна вважати, що ймовірність банкрутства

$$R = P\{S_\nu > u\} = P\left\{\frac{S_\nu - MS_\nu}{\sqrt{DS_\nu}} > \frac{u - MS_\nu}{\sqrt{DS_\nu}}\right\} =$$

$$= 1 - P\left\{\frac{S_\nu - MS_\nu}{\sqrt{DS_\nu}} < \frac{u - MS_\nu}{\sqrt{DS_\nu}}\right\} = 1 - N_{0;1}\left(\frac{u - MS_\nu}{\sqrt{DS_\nu}}\right).$$

4.5. Гамма-наближення для розрахунку ймовірності банкрутства

Апроксимація розподілу величини S_ν сумарного позову гамма-розподілом забезпечує більшу точність, ніж апроксимація нормальним розподілом.

Гамма-розподілу можна віддати перевагу, оскільки:

1) нормальний розподіл допускає від'ємні значення величини сумарного позову S_ν, чого взагалі не може бути, тоді як у разі гамма-розподілу $S_\nu > 0$;

2) імовірність великих значень S_ν (тобто подій виду $\{S_\nu > x\}$) у разі нормального розподілу спадає дуже швидко. Тому часто нормальне наближення недооцінює можливість великого позову, що може бути небезпечно для фінансового стану компанії;

3) нормальний розподіл симетричний, тобто коефіцієнт асиметрії $\gamma = 0$. Але для складеного пуассонового розподілу й для складеного від'ємного біномного розподілу завжди коефіцієнт асиметрії $\gamma > 0$. Тому гамма-наближення має перевагу порівняно з нормальним наближенням, оскільки для гамма-розподілу з параметрами $(\lambda; \alpha)$

$$M(Y_i - MY_i)^3 = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\lambda^3} - 3\frac{\alpha}{\lambda}\frac{\alpha}{\lambda^2} - \frac{\alpha^3}{\lambda^3} = \frac{2\alpha}{\lambda^3} > 0.$$

Гамма-розподіл виникає як граничний розподіл для нормованої величини сумарного позову S_ν / MS_ν у складеній від'ємній біномній моделі, якщо параметр $p \to 0$.

Теорема 4.5.1. *Нехай $Y_1, Y_2, \ldots$ — незалежні однаково розподілені додатні випадкові величини з функцією розподілу $F(x)$,*

скінченними середніми $MY_i = m$ і дисперсією $DY_i = \sigma^2$; випадкова величина ν має від'ємний біномний розподіл із параметрами (p, α), при цьому випадкові величини ν і $Y_1, Y_2, \ldots$ незалежні; $S_\nu = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu$. Тоді при $p \to 0$ розподіл нормованої суми S_ν / MS_ν збігається до гамма-розподілу з параметрами $(\alpha; \alpha)$:

$$P\left\{\frac{S_\nu}{MS_\nu} < x\right\} \to \int_0^x \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\alpha t} dt.$$

Д о в е д е н н я. Нехай φ — перетворення Лапласа розподілу F. Перетворення Лапласа випадкової величини S_ν / MS_ν

$$\Phi(s) = M \exp\left\{-s\frac{S_\nu}{MS_\nu}\right\} = \left(\frac{p}{1 - q\varphi\left(s/MS_\nu\right)}\right)^\alpha.$$

Перетворення Лапласа $\varphi(u)$ в околі точки 0 можна подати у вигляді

$$\varphi(u) = \varphi(0) + u\varphi'(0) + o(u) = 1 - uMY_i + o(u), \text{ коли } u \to 0.$$

Оскільки $p \to 0$, то

$$MS_\nu = \frac{\alpha q}{p} MY_i \to \infty,$$

а отже, для кожного фіксованого s відношення $s/MS_\nu \to 0$. Тому

$$\varphi\left(\frac{s}{MS_\nu}\right) = 1 - \frac{s}{MS_\nu} MY_i + o\left(\frac{s}{MS_\nu}\right), \text{ коли } \quad p \to 0,$$

і оскільки

$$MS_\nu = \frac{\alpha q}{p} MY_i,$$

то

$$\varphi\left(\frac{s}{MS_\nu}\right) = 1 - \frac{sp}{\alpha q} + o(p), \text{ коли } \quad p \to 0.$$

Враховуючи останню рівність, одержимо:

$$\left(\frac{p}{1 - q\varphi\left(s/MS_\nu\right)}\right)^\alpha = \left(\frac{p}{1 - (1-p)\left(1 - sp/(\alpha q) + o(p)\right)}\right)^\alpha =$$

$$= \left(\frac{p}{1 - 1 + sp/(\alpha q) + p - sp^2/(\alpha q) + o(p)} \right)^{\alpha} =$$

$$= \left(\frac{p}{sp/\alpha + p + o(p)} \right)^{\alpha} = \left(\frac{1}{1 + s/\alpha + o(1)} \right)^{\alpha}.$$

Тому

$$\lim_{p \to 0} \Phi(s) = \lim_{p \to 0} M \exp\left\{ -s \frac{S_\nu}{MS_\nu} \right\} = \left(1 + \frac{s}{\alpha} \right)^{-\alpha}.$$

Функція $(1 + s/\alpha)^{-\alpha}$ є перетворенням Лапласа гамма-розподілу з параметрами $(\alpha; \alpha)$. Дійсно,

$$\Phi_1(s) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-sx} \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\alpha x} dx = \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-(s+\alpha)x} dx.$$

Після заміни $t = (s + \alpha)x$ матимемо

$$\Phi_1(s) = \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(s + \alpha)^\alpha} \int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \left(1 + \frac{s}{\alpha} \right)^{-\alpha}.$$

Перетворення Лапласа $\Phi(s)$ при $p \to 0$ прямує до перетворення Лапласа $\Phi_1(s)$, тому розподіл сумарного позову S_ν / MS_ν збігається до гамма-розподілу з параметрами $(\alpha; \alpha)$:

$$P\left\{ \frac{S_\nu}{MS_\nu} < x \right\} \longrightarrow \int\limits_0^x \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\alpha t} dt, \;\; p \to 0.$$

Теорема доведена.

Наслідок. *Нехай сумарні позови* S_k, $k = 1, 2, \ldots$ *мають складений від'ємний біномний розподіл з параметрами* $(\alpha; p_k; F(x))$, $p_k + q_k = 1$, $q_k / p_k = kq/p$, $k = 1, 2, \ldots$, $q = 1 - p$ — *постійна величина.*

Тоді при $k \to \infty$ *розподіл нормованої суми* S_k / MS_k *збігається до гамма-розподілу з параметрами* $(\alpha; \alpha)$:

$$P\left\{ \frac{S_k}{MS_k} < x \right\} \longrightarrow \int\limits_0^x \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\alpha t} dt.$$

4.6. Задачі

4.1. Нехай число позовів ν за фіксований проміжок часу має зміщений геометричний розподіл з параметром p :

$$\pi_n = P\{\nu = n\} = p(1 - p)^{n-1}, \;\; n = 1, 2, \ldots,$$

а величини позовів розподілені показниково з параметром λ :

$$F_{Y_i}(x) = P\{Y_i < x\} = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0 \;\; (\lambda > 0). \end{cases}$$

Знайти залежність імовірності банкрутства від капіталу компанії. Задачу розв'язати двома способами: а) за допомогою перетворення Лапласа; б) за методом згорток.

4.2. За фіксований короткий проміжок часу портфель договорів страхової компанії може породити 0, 1, 2 або 3 позови з імовірностями 0,1; 0,3; 0,4; 0,2 відповідно. У випадку, якщо позов поданий, його величина дорівнює 1, 2 або 3 з ймовірностями 0,5; 0,4 та 0,1 відповідно. Визначити залежність імовірності банкрутства від капіталу компанії. Розв'язати задачу двома способами: а) за методом згорток; б) методом генератрис.

4.3. Сумарний позов до страхової компанії дорівнює $S_\nu = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu$, де ν — загальне число позовів набуває значення 0, 1, 2 з однаковими ймовірностями. Кожна з випадкових величин Y_i експоненціально розподілена із середнім $1/2$. Випадкові величини $\nu, Y_1, Y_2, \ldots$ незалежні. Обчислити $M \exp\{S_\nu\}$.

4.4. Сумарний позов до страхової компанії дорівнює $S_\nu = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu$, де ν — загальне число позовів має біномний розподіл з параметрами $N = 5$, $p = 0,1$. Кожна з випадкових величин Y_i дискретно розподілена, $P\{Y_i = 1\} = P\{Y_i = 2\} = 1/2$. Випадкові величини $\nu, Y_1, Y_2, \ldots$ незалежні. Обчислити генератрису моментів сумарного позову $M \exp\{tS_\nu\}$.

4.5. Нехай сумарний позов S_ν до страхової компанії має складений від'ємний біномний розподіл з параметрами $\alpha = 3, p = 1/3$ і величинами страхових виплат гамма-розподіленими з параметрами $\beta = 4, \lambda = 2$. Обчислити $P\{S_\nu < 24\}$, застосовуючи а) гауссове наближення; б) гамма-наближення.

4.6. У моделі колективного ризику розподіл сумарного позову до страхової компанії $S_\nu = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu$ задається розподілом числа позовів ν:

$$P\{\nu = 0\} = 0,5, \quad P\{\nu = 1\} = 0,3, \quad P\{\nu = 2\} = 0,2$$

та розподілом величини поданого позову Y_i:

$$P\{Y_i = 1\} = 0,8, \quad P\{Y_i = 4\} = 0,2.$$

Обчислити ймовірність того, що величина сумарного позову перевищує своє середнє значення більше ніж у 2 рази.

4.7. У моделі колективного ризику розподіл сумарного позову до страхової компанії $S_\nu = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu$ задається розподілом числа позовів ν:

$$P\{\nu = 0\} = 0,7, \quad P\{\nu = 2\} = 0,2, \quad P\{\nu = 3\} = 0,1$$

та розподілом величини поданого позову Y_i

$$P\{Y_i = 0\} = 0,8, \quad P\{Y_i = 10\} = 0,2.$$

Обчислити ймовірність того, що величина сумарного позову перевищує своє середнє значення більше ніж на 2 стандартні відхилення.

4.8. До страхової компанії надійшло 100 позовів за страховими випадками двох видів. За першим видом страхового випадку одержано ν позовів, середня величина позову 1, дисперсія позову 2. За другим видом страхового випадку одержано $100 - \nu$ позовів, середня величина позову 2, дисперсія позову 5. Відомо, що величина ν біномно розподілена з параметрами $N = 100$, $p = 1/2$. Обчислити середнє та дисперсію величини сумарного позову до страхової компанії.

4.9. Величина позову в разі його подання до страхової компанії дорівнює 1, 2 або 3 з імовірностями 0,5; 0,4 та 0,1 відповідно. Число позовів ν до страхової компанії має пуассонів розподіл із середнім 1,7. Знайти розподіл сумарного позову $S_\nu = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu$ до компанії. Обчислити MS_ν, DS_ν.

4.10. Нехай сумарний позов S_ν до страхової компанії має складений пуассонів розподіл з параметрами $(\lambda, F(x))$, де $\lambda = 2$, а

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 0,1, & 1 < x \le 2, \\ 0,3, & 2 < x \le 3, \\ 0,6, & 3 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Знайти розподіл сумарного позову S_ν. Обчислити MS_ν, DS_ν.

4.11. Нехай сумарний позов S_1 до однієї філії страхової компанії має складений пуассонів розподіл з параметром $\lambda_1 = 2$ і

розподілом страхових виплат за одним позовом F_1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Сумарний позов S_2 до іншої філії страхової компанії має складений пуассонів розподіл з параметром $\lambda_2 = 6$ і розподілом страхових виплат за одним позовом F_2:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Знайти розподіл суми $S_1 + S_2$, якщо S_1, S_2 — незалежні випадкові величини.

4.12. Нехай сумарний позов S_ν до страхової компанії має складений пуассонів розподіл з параметром $\lambda = 2$ і величинами страхових виплат 1, 2 або 3. Відомо, що $MS_\nu = 4,6$; $DS_\nu = 11,8$. Знайти розподіл величин страхових виплат. Обчислити $P\{S_\nu = 3\}$.

4.13. Число нещасних випадків ν на заводі протягом року має пуассонів розподіл із середнім 12. Число постраждалих через нещасний випадок дорівнює 1, 2 або 3 з імовірностями 1/2, 1/3 або 1/6 відповідно. Обчислити дисперсію сумарного числа постраждалих через нещасні випадки протягом року.

4.14. Для договору медичного страхування позови, пов'язані зі звичайними захворюваннями та стоматологічними проблемами, описуються (задаються) незалежними складеними пуассоновими розподілами. Якщо захворювання звичайне, то параметр $\lambda_1 = 2$, а страхові виплати рівномірно розподілені на відрізку $[0, 1000]$. Якщо захворювання пов'язане зі стоматологічними проблемами, то параметр $\lambda_2 = 3$, а страхові виплати рівномірно розподілені на відрізку $[0, 200]$.

За умовами договору, якщо медичні витрати за позовом менші ніж 100, то їх повністю сплачує застрахований. Якщо ж ці витрати більші 100, то застрахований сплачує 100, а страхова компанія — частину, що залишилася. Обчислити середнє значення однієї страхової виплати.

4.15. Випадкова величина S_1 має складений пуассонів розподіл з параметром $\lambda_1 = 4$ та розподілом доданків

$$P\{Y_i = 1\} = 2P\{Y_i = 2\} = 3P\{Y_i = 3\} = 6/11.$$

Випадкова величина S_2 має складений пуассонів розподіл з параметром $\lambda_2 = 2$ та розподілом доданків

$$P\{X_i = 1\} = 3P\{X_i = 2\} = 3/4.$$

Величини S_1, S_2 незалежні. Обчислити ймовірність того, що $S = 2S_1 + 4S_2$ дорівнює 4.

4.16. Число позовів ν до страхової компанії має від'ємний біномний розподіл з параметрами $\alpha = 3$, $p = 1/2$. Якщо позов поданий, його величина дорівнює 1, 2 або 3 з імовірностями 0,6; 0,3 та 0,1 відповідно. Обчислити розподіл сумарного позову $S_\nu = Y_1 + \ldots + Y_\nu$ до компанії. Знайти MS_ν, DS_ν.

4.17. Нехай сумарний позов S_ν до страхової компанії має складений пуассонів розподіл з параметром $\lambda = 12$ і рівномірно розподіленими на відрізку [0;1] величинами страхових виплат. Визначити мінімальну величину капіталу, за наявності якого імовірність банкрутства компанії не перевищує 0,05.

4.18. Нехай сумарний позов S_ν до страхової компанії має складений пуассонів розподіл з параметром $\lambda = 18$ і експоненціально розподіленими з параметром $\theta = 6$ величинами страхових виплат. Визначити мінімальну величину капіталу, за наявності якого імовірність банкрутства компанії не перевищує 0,05.

4.19. У моделі колективного ризику розподіл сумарного позову до страхової компанії $S_\nu = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu$ має складений пуассонів розподіл з параметром $\lambda = 63$ та розподілом величин страхових виплат Y_i:

$$P\{Y_i = 1\} = 0,5, \quad P\{Y_i = 5\} = 0,3, \quad P\{Y_i = 10\} = 0,2.$$

Обчислити $P\{S_\nu > 315\}$, застосовуючи гауссове наближення.

Розділ 5

Динамічна модель банкрутства

5.1. Опис динамічної моделі банкрутства

Найпростіша динамічна модель банкрутства включає два процеси: 1) процес надходження премій; 2) процес страхових виплат. Премія — це вартість страхового захисту за даним страховим договором. Премії надходять набагато частіше, ніж подаються позови, і величина премії набагато менша величини позову.

Процес надходження премій. Позначимо через c швидкість надходження премій (сума грошей за одиницю часу). Це означає, що коли в деякий момент часу t компанія мала резервний фонд u_t і до моменту $t+h$ позови не подавалися, то резерви компанії в момент $t+h$ будуть дорівнювати

$$u_{t+h} = u_t + ch.$$

Не будемо враховувати відсотки на капітал та інфляцію, щоб не ускладнювати модель.

Процес надходження позовів. За модель процесу надходження позовів візьмемо пуассонів процес (див. розд. 2).

Нехай T_n — момент подання n-го позову, $\tau_n = T_n - T_{n-1}$ — інтервал між $(n-1)$-м та n-м позовами (вважатимемо $T_0 = 0$).

Позначимо через λ інтенсивність процесу позовів (за одиницю часу подається в середньому λ позовів).

Величини $Y_1, Y_2, \ldots$ послідовних позовів будемо вважати незалежними та однаково розподіленими випадковими величинами, які не залежать від моментів T_1, $T_2, \ldots$ надходження позовів. Нехай $F(x) = P\{Y_i < x\}$ — функція розподілу, $m = MY_i$ — середнє, $\sigma^2 = DY_i$ — дисперсія величини поданого позову Y_i.

Зміну капіталу з часом ілюструє табл. 5.1.1 (див. також рис. 5.1.1).

Таблиця 5.1.1

Зміна капіталу з часом

Час	Капітал
$t = 0$	$u_0 = u$
$0 < t < T_1$	$u_t = u_0 + ct$
$t = T_1$	$u_{T_1} = u_0 + cT_1 - Y_1$
$\vdots$	$\vdots$
$T_{n-1} < t < T_n$	$u_t = u_0 + ct - \sum\limits_{i=1}^{n-1} Y_i$
$t = T_n$	$u_{T_n} = u_0 + cT_n - \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$

Цей процес триває до нескінченності, якщо тільки в кожен момент подання позову компанії вистачає коштів, щоб сплатити його. У супротивному разі компанія збанкрутує.

Компанія не збанкрутує, якщо

$$u + cT_n - \sum_{j=1}^{n} Y_j \geq 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Але якщо

$$u + cT_1 - Y_1 \geq 0,$$
$$u + cT_2 - (Y_1 + Y_2) \geq 0,$$
$$\vdots$$
$$u + cT_{n-1} - \sum_{j=1}^{n-1} Y_j \geq 0,$$

але

$$u + cT_n - \sum_{j=1}^{n} Y_j < 0,$$

то в момент T_n подання n-го позову компанія збанкрутує.

Рис. 5.1.1. Зміна капіталу з часом

Основною характеристикою динамічної моделі є ймовірність банкрутства $R = R(u)$, а основною задачею в подальшому буде вивчення залежності $R = R(u)$ від величини початкового капіталу u. Імовірність банкрутства в динамічній моделі

$$R(u) = 1 - P\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} \{u + cT_n - (Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n) \geq 0\}\right\}.$$

Позначимо через μ номер позову, за якого відбулося банкрутство. Очевидно, ймовірність банкрутства дорівнює

$$R(u) = P\{\mu < \infty\},$$

а ймовірність нерозорення — $1 - R(u) = P\{\mu = \infty\}$.

Далі завжди припускатимемо, що виконується умова

$$c > \lambda m.$$

5.2. Характеристичний коефіцієнт

Означення. *Характеристичним коефіцієнтом* (*коефіцієнтом Лундберга, або коефіцієнтом Крамера*) називають додатний розв'язок *характеристичного рівняння*

$$Me^{zY_i} = 1 + (1 + \theta)mz, \tag{5.2.1}$$

де $m = MY_i$ — середня величина поданого позову; θ — відносна страхова надбавка, яка визначається згідно з формулою

$$c = (1+\theta)\lambda m. \tag{5.2.2}$$

Характеристичне рівняння можна подати в такому вигляді:

$$\lambda M e^{zY_i} = \lambda + cz. \tag{5.2.3}$$

З а у в а ж е н н я. Оскільки Me^{zY_i} — перетворення Лапласа величини позову Y_i у точці $(-z)$, то

$$\psi(z) = Me^{zY_i} = Me^{(-z)(-Y_i)} = \varphi(-z) = \int_0^{+\infty} e^{zx} dF(x),$$

де F — розподіл величини позову Y_i. Тому функція

$$\psi(z) = Me^{zY_i} \tag{5.2.4}$$

визначена для всіх $z \leq 0$.

Існують розподіли величини позову Y_i, функція $\psi(z)$ яких не визначена для жодного значення $z > 0$ (наприклад, розподіл Парето).

Далі будемо розглядати тільки такі величини позову, для яких $\psi(z)$ визначена для деякого $z > 0$. Цю умову називають *умовою Крамера.*

Якщо всі моменти

$$MY_i^k = \int_0^{+\infty} x^k dF(x) = (-1)^k \varphi^{(k)}(0)$$

розподілу F величини позову Y_i скінченні, то функцію $\psi(z)$ називають *генератрисою нормованих моментів*. При цьому

$$\psi(z) = Me^{zY_i} = M\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(zY_i)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{MY_i^k}{k!}.$$

5.3. Нерівність Лундберга для визначення ймовірності банкрутства

Імовірність банкрутства $R(u) = P\{\mu < \infty\}$ можна знайти як границю при $n \to \infty$ імовірностей

$$R_n(u) = P\{\mu \leq n\}$$

того, що компанія збанкрутує не пізніше, ніж після подання n перших позовів:

$$R(u) = \lim_{n\to\infty} R_n(u).$$

Тоді

$$1 - R_n(u) = P\{\mu > n\}$$

— імовірність того, що перші n позовів не призведуть до банкрутства.

Компанія не збанкрутує, якщо для $n = 1, 2, \ldots$ справджується нерівність

$$u + c(\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n) - (Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n) \geq 0.$$

Тоді

$$1 - R_n(u) =$$

$$= P\left\{\bigcap_{k=1}^{n}\{u + c(\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_k) - (Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k) \geq 0\}\right\} =$$

$$= P\left\{\bigcap_{k=1}^{n}\{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k \leq u + c(\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_k)\}\right\}.$$

Теорема 5.3.1. *Імовірність того, що перші n позовів не призведуть до банкрутства компанії дорівнює*

$$1 - R_n(u) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} (1 - R_{n-1}(u + ct - x)) dF(x) dt. \tag{5.3.1}$$

Д о в е д е н н я. Якщо в момент $T_1 = \tau_1$ подання першого позову компанія не збанкрутує (тобто, якщо $Y_1 \leq u + c\tau_1$), то можна вважати, що вона фактично починає функціонувати знову, але зі зміненою величиною початкового резерву, який дорівнює $u + c\tau_1 - Y_1$.

Позначимо $\psi_k(u) = 1 - R_k(u)$. Припустимо, що перший позов надходить у момент t. "Імовірність" цієї події дорівнює $\lambda e^{\lambda t}dt$. Також припустимо, що величина позову дорівнює x — "імовірність" цієї події дорівнює $dF(x)$.

На момент t страхова компанія має капітал $u + ct - x$. Інтегруючи за t і x, одержуємо

$$\psi_n(u) = \int\limits_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int\limits_0^{\infty} \psi_{n-1}(u + ct - x)dF(x)dt$$

(ми вважаємо, що $\psi_n(y) = 0$ для $y < 0$), або

$$1 - R_n(u) = \int\limits_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int\limits_0^{u+ct} (1 - R_{n-1}(u + ct - x))dF(x)dt.$$

Теорема доведена.

Інша форма запису рівності (5.3.1) така:

$$R_n(u) = \int\limits_0^{+\infty} (1 - F(u + ct))\lambda e^{-\lambda t}dt +$$

$$+ \int\limits_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int\limits_0^{u+ct} R_{n-1}(u + ct - x)dF(x)dt. \qquad (5.3.2)$$

Дійсно, з рівності (5.3.1) маємо

$$R_n(u) = 1 - \int\limits_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int\limits_0^{u+ct} (1 - R_{n-1}(u + ct - x))dF(x)dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}dt - \int\limits_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int\limits_0^{u+ct} dF(x)dt +$$

$$+ \int\limits_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int\limits_0^{u+ct} R_{n-1}(u + ct - x)dF(x)dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \left(1 - \int\limits_0^{u+ct} dF(x)\right) \lambda e^{-\lambda t}dt +$$

$$+ \int\limits_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int\limits_0^{u+ct} R_{n-1}(u + ct - x)dF(x)dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} (1 - F(u + ct))\lambda e^{-\lambda t}dt +$$

$$+ \int\limits_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int\limits_0^{u+ct} R_{n-1}(u + ct - x)dF(x)dt.$$

Теорема 5.3.2. (нерівність Лундберга). *Нехай процес надходження позовів є пуассоновим з інтенсивністю λ, премії надходять зі швидкістю c, початковий капітал страхової компанії дорівнює u; $F(x)$ — функція розподілу величини поданого позову Y_i, r — характеристичний коефіцієнт.*

Тоді ймовірність банкрутства $R(u)$ задовольняє нерівність

$$R(u) \le e^{-ru}. \qquad (5.3.3)$$

Доведення. Застосовуючи формулу (5.3.2), доведемо нерівність

$$R_n(u) \le e^{-ru},$$

де r — характеристичний коефіцієнт.

Імовірність того, що компанія збанкрутує не пізніше ніж після подання 0 позовів, дорівнює $R_0(u) \equiv 0$. Отже, для $n = 0$: $0 \le e^{-ru}$ і нерівність справджується.

Припустимо, що (5.3.3) справджується для $n = k - 1$. Тоді згідно з рівністю (5.3.2) маємо для $n = k$

$$R_k(u) \le \int\limits_0^{+\infty} (1 - F(u + ct))\lambda e^{-\lambda t}dt +$$

$$+\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda t}\int_0^{u+ct}e^{-r(u+ct-x)}dF(x)dt=$$

$$=e^{-r(u+ct)}e^{r(u+ct)}\int_0^{+\infty}\left(\int_{u+ct}^{+\infty}dF(x)\right)\lambda e^{-\lambda t}dt+$$

$$+e^{-ru}\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda t}e^{-rct}\left(\int_0^{u+ct}e^{rx}dF(x)\right)dt=$$

$$=e^{-ru}\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda t}e^{-rct}\times$$

$$\times\Big(e^{r(u+ct)}\int_{u+ct}^{+\infty}dF(x)+\int_0^{u+ct}e^{rx}dF(x)\Big)dt.$$

Оскільки в інтегралі $\int_{u+ct}^{+\infty}dF(x)$ змінна $x\geq u+ct$, то справджується така нерівність:

$$e^{r(u+ct)}\int_{u+ct}^{+\infty}dF(x)\leq\int_{u+ct}^{+\infty}e^{rx}dF(x).$$

Тоді

$$R_k(u)\leq e^{-ru}\int_0^{+\infty}\lambda e^{-(\lambda+rc)t}\left(\int_{u+ct}^{+\infty}e^{rx}dF(x)+\int_0^{u+ct}e^{rx}dF(x)\right)dt=$$

$$=e^{-ru}\int_0^{+\infty}\lambda e^{-(\lambda+rc)t}\int_0^{+\infty}e^{rx}dF(x)dt<$$

$$<e^{-ru}\psi(r)\int_0^{+\infty}\lambda e^{-(\lambda+rc)t}dt=e^{-ru}\frac{\lambda}{\lambda+rc}\psi(r),$$

де

$$\psi(r)=\int_0^{+\infty}e^{rx}dF(x).$$

Оскільки r задовольняє характеристичне рівняння, то

$$\lambda\psi(r)=\lambda+cr,$$

звідки

$$\psi(r)=\frac{\lambda+cr}{\lambda}.$$

Отже,

$$R_k(u)\leq e^{-ru}.$$

Переходячи в останній нерівності до границі, коли $k\to\infty$, одержимо оцінку:

$$R(u)\leq e^{-ru}.$$

Теорема 5.3.3. (теорема Крамера–Лундберга). *При* $u\to\infty$

$$R(u)\sim\frac{\theta m}{\psi'(r)-(1+\theta)m}e^{-ru}. \tag{5.3.4}$$

Нерівність Лундберга (5.3.3) та асимптотика Крамера–Лундберга (5.3.4) свідчать про те, що ймовірність банкрутства мала, якщо значення характеристичного коефіцієнта велике.

Характеристичний коефіцієнт r, який включає основні параметри моделі (λ — інтенсивність надходження позовів, $F(x)$ — розподіл величини позову, c — швидкість надходження премій), є інтегральною характеристикою фінансової безпеки компанії.

5.4. Точний розрахунок імовірності банкрутства

Для ймовірності банкрутства $R(u)$ має місце рівняння, одержане з рівності (5.3.2) у результаті граничного переходу при $n\to\infty$:

$$R(u)=\int_0^{+\infty}(1-F(u+ct))\lambda e^{-\lambda t}dt+$$

$$+\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda t}\int_0^{u+ct}R(u+ct-x)dF(x)dt. \tag{5.4.1}$$

Після заміни $u+ct=y$ маємо

$$R(u)=\int_u^{+\infty}(1-F(y))\lambda\exp\left\{-\lambda\left(\frac{y-u}{c}\right)\right\}\frac{dy}{c}+$$

$$+\int_u^{+\infty}\lambda\exp\left\{-\lambda\left(\frac{y-u}{c}\right)\right\}\int_0^{y}R(y-x)dF(x)\frac{dy}{c}=$$

$$=\frac{\lambda}{c}\exp\left\{\frac{\lambda u}{c}\right\}\Bigg[\int_u^{+\infty}(1-F(y))\exp\left\{-\frac{\lambda y}{c}\right\}dy+$$

$$+\int_u^{+\infty}\exp\left\{-\frac{\lambda y}{c}\right\}\int_0^{y}R(y-x)dF(x)dy\Bigg].$$

Здиференціюємо $R(u)$ за u:

$$R^{'}(u)=\left(\frac{\lambda}{c}\right)^2\exp\left\{\frac{\lambda u}{c}\right\}\Bigg[\int_u^{+\infty}(1-F(y))\exp\left\{-\frac{\lambda y}{c}\right\}dy+$$

$$+\int_u^{+\infty}\exp\left\{-\frac{\lambda y}{c}\right\}\int_0^{y}R(y-x)dF(x)dy\Bigg]+$$

$$+\frac{\lambda}{c}\exp\left\{\frac{\lambda u}{c}\right\}\Bigg[\frac{d}{du}\int_u^{+\infty}(1-F(y))\exp\left\{-\frac{\lambda y}{c}\right\}dy+$$

$$+\frac{d}{du}\int_u^{+\infty}\exp\left\{-\frac{\lambda y}{c}\right\}\int_0^{y}R(y-x)dF(x)dy\Bigg], \tag{5.4.2}$$

де

$$\frac{d}{du}\int_u^{+\infty}(1-F(y))\exp\left\{-\frac{\lambda y}{c}\right\}dy=-(1-F(u))\exp\left\{-\frac{\lambda u}{c}\right\}, \tag{5.4.3}$$

$$\frac{d}{du}\int_u^{+\infty}\exp\left\{-\frac{\lambda y}{c}\right\}\int_0^{y}R(y-x)dF(x)dy=$$

$$=-\exp\left\{\frac{-\lambda u}{c}\right\}\int_0^{u}R(u-x)dF(x). \tag{5.4.4}$$

Із рівностей (5.4.2), (5.4.3) і (5.4.4) маємо

$$R^{'}(u)=\left(\frac{\lambda}{c}\right)^2\exp\left\{\frac{\lambda u}{c}\right\}\Bigg[\int_u^{+\infty}(1-F(y))\exp\left\{\frac{-\lambda y}{c}\right\}dy+$$

$$+\int_u^{+\infty}\exp\left\{\frac{-\lambda y}{c}\right\}\int_0^{y}R(y-x)dF(x)dy\Bigg]-$$

$$-\frac{\lambda}{c}\exp\left\{\frac{\lambda u}{c}\right\}\Bigg[(1-F(u))\exp\left\{\frac{-\lambda u}{c}\right\}+$$

$$+\exp\left\{\frac{-\lambda u}{c}\right\}\int_0^{u}R(u-x)dF(x)\Bigg]=$$

$$=\frac{\lambda}{c}R(u)-\frac{\lambda}{c}(1-F(u))-\frac{\lambda}{c}\int_0^{u}R(u-x)dF(x),$$

тобто

$$R'(u)=\frac{\lambda}{c}R(u)-\frac{\lambda}{c}(1-F(u))-\frac{\lambda}{c}\int_0^{u}R(u-x)dF(x). \tag{5.4.5}$$

Щоб розв'язати рівняння (5.4.5), введемо функції

$$\rho(s) = \int_0^{+\infty} e^{-su} R(u) du$$

(перетворення Лапласа ймовірності банкрутства);

$$\varphi(s) = \int_0^{+\infty} e^{-su} dF(u)$$

(перетворення Лапласа величини позову).

Функція $\rho(s)$ визначена для $s > -r$. Дійсно, з нерівності Лундберга випливає співвідношення

$$\rho(s) = \int_0^{+\infty} e^{-su} R(u) du \le \int_0^{+\infty} e^{-su} e^{-ru} du = \frac{1}{s+r}.$$

Отже,

$$\rho(s) \le \frac{1}{s+r} \quad \text{для} \quad s > -r.$$

Обчислимо три інтеграли:

$$\int_0^{+\infty} e^{-su} R^{'}(u) du = -R(0) + s\rho(s);$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-su}(1-F(u)) du = \frac{-1}{s} \int_0^{+\infty} (1-F(u)) d(e^{-su}) =$$

$$= \left(\frac{1}{-s}\right) \left[(1-F(u)) e^{-su} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-su} dF(u) \right] =$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\varphi(s);$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-su} \int_0^{u} R(u-x) dF(x) du =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-su} \int_x^{+\infty} R(u-x) du dF(x) =$$

$$= \int_0^{+\infty} dF(x) \int_x^{+\infty} R(u-x) e^{-su} du =$$

$$= e^{-sx} e^{sx} \int_0^{+\infty} dF(x) \int_x^{+\infty} R(u-x) e^{-su} du =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-sx} dF(x) \int_x^{+\infty} e^{-s(u-x)} R(u-x) du =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-sx} dF(x) \int_0^{+\infty} e^{-st} R(t) dt = \varphi(s)\rho(s).$$

Тоді рівняння (5.4.5) набуває такого вигляду:

$$-R(0) + s\rho(s) = \frac{\lambda}{c}\rho(s) - \frac{\lambda}{c}\varphi(s)\rho(s) - \frac{\lambda}{c}\frac{1-\varphi(s)}{s},$$

звідси

$$\left(s - \frac{\lambda}{c} + \frac{\lambda}{c}\varphi(s)\right)\rho(s) = R(0) - \frac{\lambda}{c}\frac{1-\varphi(s)}{s},$$

$$\rho(s) = \frac{R(0) - \lambda(1-\varphi(s))/(cs)}{s - \lambda(1-\varphi(s))/c}. \tag{5.4.6}$$

Одержали перетворення Лапласа ймовірності банкрутства.

При $s = 0$ знаменник дробу дорівнює 0:

$$s - \frac{\lambda}{c}(1-\varphi(s)) = -\frac{\lambda}{c}(1-\varphi(0)) = 0,$$

тоді як $\rho(0) < \infty$ (за нерівністю Лундберга $\rho(s) < \infty$ при $s > -r$), тому чисельник дробу має дорівнювати 0 при $s = 0$. Звідси знаходимо $R(0)$:

$$R(0) = \lim_{s\to 0} \frac{\lambda}{c}\frac{1-\varphi(s)}{s} = -\frac{\lambda}{c}\varphi'(0) = \frac{\lambda}{c}m.$$

Оскільки

$$c = (1+\theta)\lambda m,$$

то

$$R(0) = \frac{1}{1+\theta}.$$

Тому рівність (5.4.6) можна переписати так:

$$\rho(s) = \frac{R(0)cs - \lambda(1-\varphi(s))}{cs^2 - cs\lambda(1-\varphi(s))/c} = \frac{R(0)cs - \lambda + \lambda\varphi(s)}{s(cs - \lambda + \lambda\varphi(s))} =$$

$$= \frac{R(0)cs/\lambda - 1 + \varphi(s)}{s\,(cs/\lambda - 1 + \varphi(s))} =$$

$$= \frac{1-\varphi(s) - R(0)cs/\lambda}{s\,(1-\varphi(s) - cs/\lambda)} = \frac{1-\varphi(s) - ms}{s(1-\varphi(s) - (1+\theta)ms)}.$$

$$\rho(s) = \frac{1-\varphi(s) - ms}{s(1-\varphi(s) - (1+\theta)ms)}. \tag{5.4.7}$$

Остання формула дає явний вираз для ймовірності банкрутства в термінах перетворення Лапласа.

Для величини позову з даним розподілом можна в явному вигляді знайти функцію $\varphi(s)$, а також і функцію $\rho(s)$.

За виразом для $\rho(s)$ можна знайти (аналітично або числовим методом) обернене перетворення Лапласа від $\rho(s)$, а також у явному вигляді залежність ймовірності банкрутства $R(u)$ від величини початкового резерву u.

Приклад 5.4.1. *Знайти характеристичний коефіцієнт, якщо розподіл величин позовів є експоненціальним з параметром $\lambda = 1/m$. Відносна страхова надбавка θ відома.*

Р о з в ' я з а н н я. Перетворення Лапласа величини позову дорівнює

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda}{\lambda+s}, \quad s > -\lambda.$$

Генератрисою моментів є

$$\psi(z) = \varphi(-z) = \frac{\lambda}{\lambda - z} = \frac{1}{1-mz}, \quad z < \lambda.$$

Характеристичне рівняння має вигляд

$$\frac{1}{1-mz} = 1 + (1+\theta)zm.$$

Рівняння має єдиний додатний розв'язок $r = \dfrac{\theta}{(1+\theta)m}$, який і є характеристичним коефіцієнтом.

Приклад 5.4.2. *Визначити ймовірність банкрутства $R(u)$, якщо величина позову має експоненціальний розподіл з параметром $\lambda = 1/m$. Відносна страхова надбавка θ відома.*

Р о з в ' я з а н н я. Перетворення Лапласа величини позову дорівнює

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda}{\lambda+s} = \frac{1}{1+ms}.$$

Згідно з рівністю (5.4.7) перетворенням Лапласа ймовірності банкрутства є

$$\rho(s) = \frac{1-\varphi(s) - ms}{s(1-\varphi(s) - (1+\theta)ms)} = \frac{m}{\theta}\cdot\frac{\frac{\theta}{(1+\theta)m}}{\frac{\theta}{(1+\theta)m} + s}.$$

Оскільки дріб вигляду $b/(b+s)$ є перетворенням Лапласа експоненціального розподілу з параметром b, то $R(u) = \dfrac{1}{1+\theta}e^{-ru}$, де $r = \dfrac{\theta}{(1+\theta)m}$.

Приклад 5.4.3. *Інтенсивність надходження позовів $\lambda = 5$, швидкість надходження премій $c = 1$, а величина позову, що надходить, з імовірністю $1/10$ має експоненціальний розподіл із середнім $m_1 = 1/2$ та ймовірністю $9/10$ — експоненціальний розподіл із середнім $m_2 = 1/10$. Знайти залежність імовірності банкрутства $R(u)$ від величини початкових резервів u. Обчислити відносну похибку від заміни ймовірності банкрутства $R(u)$ оцінкою Лундберга, асимптотикою Крамера–Лундберга.*

Р о з в ' я з а н н я. Щільність величини позову $f(x)$ є сумішшю з вагами $1/10$ та $9/10$ щільностей відповідних експоненціальних розподілів:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{10} \cdot 2e^{-2x} + \frac{9}{10} \cdot 10e^{-10x}, & x > 0. \end{cases}$$

Перетворення Лапласа $\varphi(s)$ величини позову є

$$\varphi(s) = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{s+2} + \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{s+10} = \frac{2(23s+50)}{5(s+2)(s+10)}.$$

Середнє значення величини позову дорівнює

$$m = \frac{1}{10}m_1 + \frac{9}{10}m_2 = \frac{7}{50}.$$

Відносна страхова надбавка знаходиться з умови $c = (1+\theta)\lambda m$, тобто

$$\theta = \frac{c}{\lambda m} - 1 = \frac{3}{7}.$$

Тоді перетворення Лапласа ймовірності банкрутства

$$\rho(s) = \frac{1 - \varphi(s) - ms}{s(1 - \varphi(s) - (1+\theta)ms)} =$$

$$= \frac{1 - \frac{2(23s+50)}{5(s+2)(s+10)} - \frac{7}{50}s}{s\left(1 - \frac{2(23s+50)}{5(s+2)(s+10)} - \left(1+\frac{3}{7}\right)\frac{7}{50}s\right)} =$$

$$= \frac{4}{150} \cdot \frac{6}{s+6} + \frac{27}{50} \cdot \frac{1}{s+1}.$$

Оскільки функція $g(s) = a/(a+s)$ (де $s > -a$) є перетворенням Лапласа функції

$$p(u) = \begin{cases} 0, & u \le 0, \\ ae^{-au}, & u > 0, \end{cases}$$

то оберненням перетворення Лапласа знаходимо залежність ймовірності банкрутства $R(u)$ від величини капіталу u:

$$R(u) = \frac{4}{25} \cdot e^{-6u} + \frac{27}{50} \cdot e^{-u}.$$

Тепер обчислимо відносну похибку від заміни ймовірності банкрутства $R(u)$ оцінкою Лундберга.

Перетворення Лапласа величини позову

$$\varphi(s) = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{s+2} + \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{s+10}$$

визначене для $s > -2$. Тому генератриса моментів $\psi(z)$ визначена для $z < 2$ і дорівнює

$$\psi(z) = \varphi(-z) = \frac{2(-23z+50)}{5(-z+2)(-z+10)} = \frac{-46z+100}{5(z^2-12z+20)}.$$

Характеристичний коефіцієнт r є додатним розв'язком рівняння:

$$\frac{-46z+100}{5(z^2-12z+20)} = 1 + \left(1+\frac{3}{7}\right)\frac{7}{50}z.$$

Рівняння має три корені: $z_0 = 0, z_1 = 1, z_2 = 6$. Оскільки генератриса моментів $\psi(z)$ визначена для $z < 2$, то рівняння має єдиний додатний розв'язок $r = 1$. Це і є характеристичний коефіцієнт.

Отже, нерівність Лундберга набуває вигляду

$$R(u) = \frac{4}{25} \cdot e^{-6u} + \frac{27}{50} \cdot e^{-u} \le e^{-u}.$$

Тому відносна похибка від заміни ймовірності банкрутства $R(u)$ оцінкою Лундберга дорівнює

$$\frac{|R(u) - e^{-ru}|}{e^{-ru}} = \frac{23}{50} - \frac{4e^{-5u}}{25}.$$

Підрахуємо відносну похибку від заміни ймовірності банкрутства $R(u)$ оцінкою Лундберга для ймовірності банкрутства $\alpha = 0,05$.

Точна формула

$$\frac{4}{25} \cdot e^{-6u} + \frac{27}{50} \cdot e^{-u} = 0,05$$

дає $u \approx 2,3795482$, а з оцінки Лундберга

$$e^{-u} = 0,05$$

одержуємо $u \approx 2,9957323$. Отже, відносна похибка дорівнює $|2,3795482 - 2,9957323|/2,9957323 \approx 0,21$.

Тепер обчислимо відносну похибку від заміни ймовірності банкрутства $R(u)$ асимптотикою Крамера–Лундберга. Для цього знайдемо похідну генератриси моментів $\psi(z)$:

$$\psi'(z) = \frac{2(23z^2 - 100z + 140)}{5(z-2)^2(z-10)^2}.$$

Зокрема,

$$\psi'(r) = \psi'(1) = \frac{14}{45}.$$

Отже, асимптотика Крамера–Лундберга має вигляд

$$R(u) \sim \frac{\theta m}{\psi'(r) - (1+\theta)m} e^{-ru} = \frac{27}{50} e^{-u}.$$

Відносна похибка від заміни ймовірності банкрутства $R(u)$ асимптотикою Лундберга дорівнює

$$\frac{|R(u) - 27e^{-u}/50|}{27e^{-u}/50} = \frac{8e^{-5u}}{27}.$$

Для $\alpha = 0,05$ точна формула дає $u = 2,3795482$, а асимптотика Крамера–Лундберга — $u \approx 2,3795461$. Отже, відносна похибка дорівнює

$$\frac{|2,3795482 - 2,3795461|}{2,3795461} \approx 9 \cdot 10^{-7}.$$

5.5. Задачі

5.1. Початковий капітал страхової компанії u_0 дорівнює 1. Портфель договорів може призвести до одного страхового випадку, а може й не призвести до нього. Відомо, що величина дійсно поданого позову дорівнює 5, а ймовірність події "відбувся страховий випадок" — 1/3. Час надходження дійсно поданого позову задається щільністю

$$f(t) = 2t^{-3}, \quad t > 1.$$

Швидкість надходження премій — 3. Обчислити ймовірність банкрутства компанії.

5.2. Початковий капітал страхової компанії u_0 дорівнює 60. Портфель договорів може призвести до одного страхового випадку, а може й не призвести до нього. Відомо, що величина дійсно поданого позову набуває значень 100 та 200 з імовірностями 0,6 та 0,4 відповідно. Імовірність того, що дійсно поданий позов не надійде до моменту часу t дорівнює $1/(1+t)$. Швидкість надходження премій — 20. Обчислити ймовірність банкрутства компанії.

5.3. Початковий капітал страхової компанії u_0 дорівнює 1. Величини $Y_1, Y_2, \ldots$ послідовних позовів вважатимемо незалежними й рівномірно розподіленими на $[0, 10]$. У кожен момент часу $1, 2, \ldots$ висувається точно один позов. Відносна страхова надбавка $\theta = 0,2$. Обчислити ймовірність банкрутства компанії в момент 2.

5.4. Величина позову, що надходить до страхової компанії, має розподіл $P\{X = 1\} = 1/4$, $P\{X = 2\} = 3/4$. Обчислити відносну страхову надбавку θ, якщо характеристичний коефіцієнт $r = \ln 2$.

5.5. Величина позову, що надходить до страхової компанії, має експоненціальний розподіл з параметром $\lambda = 3$. Обчислити відносну страхову надбавку θ, якщо характеристичний коефіцієнт $r = 1$.

5.6. Процес надходження позовів є пуассоновим з постійною величиною дійсно поданих позовів. Інтенсивність процесу позовів $\lambda = 5$. Швидкість надходження премій $c = 50$. Характеристичний коефіцієнт дорівнює 0,85. Обчислити величину дійсно поданого позову.

5.7. Процес надходження позовів є пуассоновим, при цьому дійсно подані позови набувають значень 1, 2 або 3 з однаковою імовірністю. Інтенсивність процесу позовів $\lambda = 2$. Обчислити швидкість надходження премій, яка б забезпечувала характеристичний коефіцієнт 1/2.

5.8. Залежність імовірності банкрутства $R(u)$ від величини початкових резервів u визначається рівністю

$$R(u) = 0,3e^{-2u} + 0,2e^{-4u} + 0,1e^{-7u}, \ \ u \geq 0.$$

Обчислити відносну страхову надбавку θ.

5.9. Процес надходження позовів є пуассоновим з експоненціально розподіленими величинами дійсно поданих позовів. Відомо, що ймовірність банкрутства при початковому капіталі страхової компанії $u_0 = 50$ дорівнює 0,01. Відносна страхова надбавка $\theta = 0,25$. Швидкість надходження премій $c = 5$. Обчислити інтенсивність λ процесу позовів.

5.10. Інтенсивність надходження позовів $\lambda = 2$, швидкість надходження премій $c = 1$. Величина позову, що надходить, з імовірністю $1/4$ має експоненціальний розподіл із середнім $1/2$, а з імовірністю $3/4$ — експоненціальний розподіл із середнім $1/4$. Знайти характеристичний коефіцієнт r.

5.11. Інтенсивність надходження позовів $\lambda = 3$, швидкість надходження премій $c = 1$, а позов, який надходить, з імовірністю $1/9$ має експоненціальний розподіл із середнім $1/3$, а з імовірністю $8/9$ — експоненціальний розподіл із середнім $1/6$. Знайти залежність імовірності банкрутства $R(u)$ від величини початкових резервів u. Обчислити відносну похибку від заміни ймовірності банкрутства $R(u)$ оцінкою Лундберга, асимптотикою Крамера–Лундберга.

5.12. Інтенсивність надходження позовів $\lambda = 3$, швидкість надходження премій $c = 1$. Величина позову, що надходить до страхової компанії, з імовірністю $1/2$ має експоненціальний розподіл з параметром $\lambda_1 = 3$ і з імовірністю $1/2$ — експоненціальний розподіл з параметром $\lambda_2 = 7$. Знайти залежність імовірності банкрутства $R(u)$ від величини початкових резервів u. Обчислити відносну похибку від заміни $R(u)$ оцінкою Лундберга, асимптотикою Крамера–Лундберга.

5.13. Інтенсивність надходження позовів $\lambda = 1$, швидкість надходження премій $c = 5$. Величина позову, що надходить, має гамма-розподіл з параметрами $\alpha = 2$, $\beta = 3/4$. Знайти залежність імовірності банкрутства $R(u)$ від величини початкових резервів u.

5.14. Інтенсивність надходження позовів $\lambda = 2$, швидкість надходження премій $c = 9$. Величина позову, що надходить, має гамма-розподіл з параметрами $\alpha = 2$, $\beta = 5/6$. Знайти залежність імовірності банкрутства $R(u)$ від величини початкових резервів u.

Розділ 6

Вказівки до розв'язування задач, відповіді

6.1. До розділу 1

1.1. $MX = 250,\ DX = 2,5 \cdot 10^7$.
1.2. $MX = 450$ грн, $DX = 1,45 \cdot 10^8$.
1.3.

$$P\{|Y - MY| < \sqrt{DY}\} = P\{|Y - 55| < \sqrt{475}\} = P\{Y = 40\}+$$

$$+P\{Y = 50\} + P\{Y = 60\} + P\{Y = 70\} = 0,45.$$

1.4.

$$MY = \int_0^a xf(x)dx = \int_0^a \frac{x}{a}dx = \frac{a}{2}.$$

$$MY^2 = \int_0^a x^2 f(x)dx = \int_0^a \frac{x^2}{a}dx = \frac{a^2}{3}.$$

$$DY = MY^2 - (MY)^2 = \frac{a^2}{12}.$$

$$MX = MYP\{I = 1\} = 0,01\,a.$$

$$DX = DYP\{I=1\} + (MY)^2 P\{I=1\}P\{I=0\} = \frac{a^2}{12} \cdot 0,0248.$$

1.5. $MX = 300,\ \ DX = 1,2 \cdot 10^9$.

1.6. Відомо, що

$$MYP\{I=1\} = 2,$$

$$DYP\{I=1\} + (MY)^2 P\{I=1\}P\{I=0\} = 30,$$
$$DY = 16.$$

Розв'язуючи систему рівнянь відносно $P\{I=1\}$, знаходимо $P\{I=1\} = 1/8$. Тоді $MY = 16$.

1.7. Нехай I — індикатор події "на складі відбулася пожежа". Тоді розподілом I є

0	1
0,9	0,1

Розподілом Y є

500	1000	10000	50000	100000
0,6	0,3	0,08	0,01	0,01

Середня величина індивідуального позову за договором $MX = 290$. Відомо, що $MX = MYP\{I=1\}$, звідки $MY = 2\,900$.

1.8. а) $g(z) = \frac{1}{4}(1+z)^2 = \frac{1}{4}z^0 + \frac{1}{2}z^1 + \frac{1}{4}z^2$.

$g(z)$ — генератриса розподілу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

б) $g(z) = p(1-qz)^{-1} = p\sum\limits_{k=0}^{\infty}(qz)^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k z^k$.

$g(z)$ — генератриса геометричного розподілу з параметром p;

в) $g(z) = \exp\{\lambda(z-1)\} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} z^k$.

$g(z)$ — генератриса експоненціального розподілу з параметром λ;

г) $g(z) = (p+qz)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k (qz)^k p^{n-k}$.

$g(z)$ — генератриса біномного розподілу з параметрами n, q;

д) $g(z) = 1 + \frac{1-z}{z}\ln(1-z) = 1 + \frac{1}{z}\ln(1-z) - \ln(1-z) =$

$$= 1 - \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)z^n.$$

$g(z)$ — генератриса розподілу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \dots & \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} & \dots \end{pmatrix}.$$

1.9. Шукану ймовірність $P\{200 < Y < 500\}$ можна подати у вигляді

$$P\{200 < Y < 500\} = P\{\ln 200 < Z < \ln 500\} =$$
$$= P\left(\frac{\ln 200 - MZ}{\sqrt{DZ}} < \frac{Z - MZ}{\sqrt{DZ}} < \frac{\ln 500 - MZ}{\sqrt{DZ}}\right) =$$
$$= N_{0;1}\left(\frac{\ln 500 - MZ}{\sqrt{DZ}}\right) - N_{0;1}\left(\frac{\ln 200 - MZ}{\sqrt{DZ}}\right) = 0,263.$$

1.10. Константу C знайдемо з умови

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{C}{(1+x)^4}dx = 1.$$

Щільність дорівнює $f(x) = 3/(1+x)^4,\ x > 0$. Звідси $MY = 1/2$.

1.11. Обчислимо додаткову функцію розподілу [1] випадкової величини Y. При $0 < x < 1$

$$1 - F(x) = \int\limits_x^1 f(t)dt = \int\limits_x^1 k(1-t)^4 dt = k(1-x)^5/5.$$

Відомо, що $F(0) = 0$, тоді значення параметра k дорівнює 5. Додаткова функція розподілу має вигляд

$$1 - F(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \le 0; \\ (1-x)^5, & \text{якщо } x \in (0,1); \\ 0, & \text{якщо } x \ge 1. \end{cases}$$

[1] Додатковою функцією розподілу для функції розподілу $F(x)$ називається функція $G(x) = 1 - F(x)$.

Шукана ймовірність дорівнює

$$P\{Z > 40000\,|Z > 10000\} = P\{Y > 0,4\,|Y > 0,1\} =$$

$$= \frac{P\{Y > 0,4,\ Y > 0,1\}}{P\{Y > 0,1\}} = \frac{P\{Y > 0,4\}}{P\{Y > 0,1\}} =$$

$$= \frac{1 - F(0,4)}{1 - F(0,1)} = 32/243.$$

1.12. Обчислимо додаткову функцію розподілу випадкової величини Y. При $0 < x < 20$

$$1 - F(x) = \int_x^{20} f(t)dt = \int_x^{20} 0,005(20 - t)dt =$$

$$= 0,005\,(200 - 20x + x^2/2).$$

При $x \le 0$ $1 - F(x) = 1$, а при $x \ge 20$ $1 - F(x) = 0$. Шукана ймовірність дорівнює

$$P\{Y > 16|Y > 8\} = \frac{1 - F(16)}{1 - F(8)} = 1/9.$$

1.13. Параметр λ експоненціального розподілу дорівнює $1/MT = 1/10$. Згідно з договором індивідуальний позов X до компанії можна подати у вигляді

$$X = \begin{cases} x, & \text{якщо } T \le 1; \\ 0,5x, & \text{якщо } 1 < T < 3; \\ 0, & \text{якщо } T \ge 3. \end{cases}$$

Тоді

$$MX = xP\{T \le 1\} + 0,5xP\{1 < T < 3\} =$$

$$= x(1 - \exp(-\lambda)) + 0,5x(\exp(-\lambda) - \exp(-3\lambda)) =$$

$$= 0,5x(2 - \exp(-\lambda) - \exp(-3\lambda)).$$

Звідси знаходимо страхову суму x:

$$x = \frac{2MX}{2 - \exp(-\lambda) - \exp(-3\lambda)} = 5644,23.$$

1.14. Нехай Y_1, Y_2, Y_3 — річні збитки від штормів, пожеж та розкрадання майна відповідно, $U = \max\{Y_1, Y_2, Y_3\}$. Тоді

$$P\{U > 3\} = 1 - P\{U \le 3\} = 1 - P\{Y_1 \le 3, Y_2 \le 3, Y_3 \le 3\} =$$

$$= 1 - P\{Y_1 \le 3\}P\{Y_2 \le 3\}P\{Y_3 \le 3\} =$$

$$= 1 - (1 - \exp(-3))(1 - \exp(-2))(1 - \exp(-5/4)) = 0,414.$$

1.16. Застосуємо формулу повної імовірності, розглянувши як повну групу події $\{\nu = n\},\ n = 1, 2, \ldots$

$$P\{\max\{Y_1, \ldots, Y_\nu\} < x\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{\max\{Y_1, \ldots, Y_n\} < x\}P\{\nu = n\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (F(x))^n P\{\nu = n\} = g(F(x)).$$

$$P\{\min\{Y_1, \ldots, Y_\nu\} < x\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{\min\{Y_1, \ldots, Y_n\} < x\}P\{\nu = n\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (1 - (1 - F(x))^n)P\{\nu = n\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{\nu = n\} - \sum_{n=1}^{\infty} (1 - F(x))^n P\{\nu = n\} = 1 - g(1 - F(x)).$$

1.17. $\pi(g(z))$.

1.18. $e^{-sb}\varphi(sa)$.

1.19. Нехай $F_1(x), F_2(x), \ldots$ — функції розподілу, які відповідають $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots$ Тоді перетворення Лапласа функції розподілу $F(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k F_k(x)$ дорівнює $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(s)$. Дійсно,

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} F(dx) = \int_0^{\infty} e^{-sx} d\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k F_k(x)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\int_0^{\infty} e^{-sx} F_k(dx) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(s) = \varphi(s).$$

1.20. $\pi(\varphi(s))$.

1.21. а) Атомічний розподіл, зосереджений у точці a; б) експоненціальний розподіл з параметром λ; в) гамма-розподіл з параметрами β, α; г) розподіл Пуассона з параметром λ; д) геометричний розподіл з параметром q.

1.24. Знайдемо функцію розподілу $F_X(x)$ випадкової величини X за допомогою формули повної імовірності.

Очевидно, для $x < 0$

$$F_X(x) = P\{IY < x\} = 0.$$

Для $x \in (0, L]$

$$F_X(x) = P\{I = 1\}P\{IY < x | I = 1\} + P\{I = 0\}P\{IY < x | I = 0\} =$$

$$= 0,9 + 0,1 \left(1 - e^{-\lambda x}\right) = 1 - 0,1e^{-\lambda x}.$$

Для $x > L$ маємо

$$F_X(x) = 1 \cdot 0,9 + 1 \cdot 0,1 = 1.$$

Таким чином,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 1 - 0,1e^{-\lambda x}, & 0 < x \le L; \\ 1, & x > L. \end{cases}$$

Враховуючи, що випадкова величина Y має єдиний атом з масою $e^{-\lambda L}$ у точці L, маємо:

$$MY = Le^{-\lambda L} + \int_0^L x\lambda e^{-\lambda x} dx = (1 - e^{-\lambda L})/\lambda;$$

$$MY^2 = L^2 e^{-\lambda L} + \int_0^L x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}(1 - e^{-\lambda L}) - \frac{2L}{\lambda} e^{-\lambda L};$$

$$DY = MY^2 - (MY)^2 = \frac{1 - 2\lambda L e^{-\lambda L} - e^{-2\lambda L}}{\lambda^2}.$$

1.25. Необхідно знайти таку межу d, щоб $MY = 0,25MZ$, де Y — величина дійсно поданого позову, Z — дійсно зазнані втрати клієнта. Умову договору страхування можна записати так:

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{якщо } Z \le d; \\ Z - d, & \text{якщо } Z > d, \end{cases}$$

або

$$Y = (Z - d)^+ = \max\{0, Z - d\}.$$

Межа d повинна бути менша за 1 000, у супротивному разі страхова компанія позов не приймає. Тому математичне сподівання величини X дорівнює

$$MY = \int_d^{1000} (x - d) f_Z(x) dx = \int_d^{1000} \frac{x - d}{1000} dx = 500 - d + \frac{d^2}{2000}.$$

Зазначимо, що $MZ = 500$. Розв'язуючи рівняння $MY = 0,25MZ$ відносно d маємо $d_1 = 1500, d_2 = 500$. Оскільки $d_1 > 1000$, то шуканим значенням межі d є 500.

1.26. $P\{X > 0\} = 0,1 \cdot \exp\{-1/5\}$;

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3000} \exp\{-x/3000\}, & x > 0; \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

1.27. Константа K знаходиться з умови

$$\sum_n P\{Z = n\} = 1,$$

або, що те саме,

$$K + \frac{K}{2} + \frac{K}{3} + \frac{K}{4} + \frac{K}{5} = 1$$

і дорівнює $60/137$. Нехай

$$Y = (Z - d)^+ = \max\{0, Z - d\}$$

— величина дійсно поданого позову клієнтом до компанії. Тоді середнє значення величини Y дорівнює

$$MY = \sum_{n=3}^{5}(n-2)P\{Z=n\} =$$

$$= 1\cdot P\{Z=3\} + 2\cdot P\{Z=4\} + 3\cdot P\{Z=5\} = 86/137.$$

А середня величина індивідуального позову X до компанії дорівнює

$$MX = MYP\{I=1\} = 43/1370.$$

1.28. Нехай Z — вартість ремонту після аварії, Y — величина дійсно поданого позову до страхової компанії. Умову договору страхування можна записати так:

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{якщо } Z \le 250; \\ Z-250, & \text{якщо } Z > 250, \end{cases}$$

або

$$Y = (Z-250)^+ = \max\{0, Z-250\}.$$

Середнє значення величини Y дорівнює

$$MY = \int_{250}^{1500}(x-250)f_Z(x)dx = \int_{250}^{1500}\frac{x-250}{1500}dx = 5^5/6.$$

Другий момент величини Y дорівнює

$$MY^2 = \int_{250}^{1500}(x-250)^2 f_Z(x)dx = \int_{250}^{1500}\frac{(x-250)^2}{1500}dx = 2\cdot 5^9/9.$$

Дисперсія $DY = 5^9/12$, стандартне відхилення $\sqrt{DY} = 5^5/\sqrt{60}$.

1.29. Функція розподілу випадкової величини Z знаходиться за щільністю, а саме:

$$F(x) = \int_0^x c\exp\{-0,004t\}dt = 250c(1-\exp\{-0,004x\}), \quad x \ge 0.$$

Оскільки $F(+\infty) = 1$, то звідси константа $c = 0,004$. Отже, $F(x) = 1-\exp\{-0,004x\}$, $x \ge 0$. Позначимо через Y величину дійсно поданого позову. За умовами договору

$$Y = \min\{Z, 250\} = \begin{cases} Z, & \text{якщо } Z \le 250; \\ 250, & \text{якщо } Z > 250. \end{cases}$$

Функція розподілу випадкової величини Y дорівнює

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ 1-\exp\{-0,004x\}, & \text{якщо } 0 < x \le 250; \\ 1, & \text{якщо } x > 250. \end{cases}$$

Далі, оскільки $F_Y(0) = 0$, $F_Y(250) = 1-\exp\{-1\}$, на проміжку [0;250] функція $F_Y(x)$ монотонно зростає, то рівняння $F_Y(x) = 1/2$ має єдиний корінь $x = 250\ln 2$, який і є медіаною розподілу величини дійсно поданого позову Y.

1.30. Позначимо через Z величину дійсно зазнаних збитків, тоді $Y = \min\{Z, 1000\}$ — величина дійсно поданого позову до страхової компанії. Оскільки

$$P\{Y > x\} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \ge 1000; \\ 1-F(x), & \text{якщо } x < 1000, \end{cases}$$

то середня величина дійсно поданого позову дорівнює

$$MY = \int_0^{+\infty} P\{Y > x\}dx = \int_0^{1000}(1-F(x))dx =$$

$$= \int_0^{1000}(0,8\exp\{-0,02x\} + 0,2\exp\{-0,001x\})dx =$$

$$= 40\cdot(1-\exp\{-20\}) + 200\cdot(1-\exp\{-1\}).$$

1.31. Візьмемо за одиницю 1 млн доларів. Нехай Y — величина виплат страхової компанії за договором (у млн доларів). За умовами договору

$$Y = \min\{Z, 1\} = \begin{cases} Z, & \text{якщо } Z \le 1; \\ 1, & \text{якщо } Z > 1. \end{cases}$$

Середнє значення випадкової величини Y дорівнює

$$MY = \int\limits_0^{+\infty} \min\{x,1\} f_Z(x)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 x f_Z(x)dx + \int\limits_1^{+\infty} f_Z(x)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 x\frac{x(4-x)}{9}\,dx + \int\limits_1^3 \frac{x(4-x)}{9}\,dx = 101/108.$$

1.32.

$$q_k = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha+k-1)}{k!}\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{\beta+1}\right)^{k},\ k=0,1,\dots$$

6.2. До розділу 2

2.1. Шукана ймовірність дорівнює

$$P\{\nu \geq 1|\nu \leq 4\} = \frac{P\{1\leq \nu \leq 4\}}{P\{\nu \leq 4\}},$$

де

$$P\{1\leq \nu\leq 4\} = P\{\nu=1\}+P\{\nu=2\}+P\{\nu=3\}+$$
$$+P\{\nu=4\} = 1/3,$$
$$P\{\nu\leq 4\} = P\{\nu=0\}+P\{\nu=1\}+P\{\nu=2\}+$$
$$+P\{\nu=3\}+P\{\nu=4\} = 5/6,$$

отже, $P\{\nu \geq 1|\nu\leq 4\} = 2/5$.

2.2. Нехай ν_1 та ν_2 — число позовів, поданих протягом першого та другого тижнів відповідно. З огляду на незалежність цих випадкових величин розподіл суми $\nu_1+\nu_2$ дорівнює

$$P\{\nu_1+\nu_2=n\} = \sum_{k=0}^{n} P\{\nu_1=k\}P\{\nu_2=n-k\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}}\frac{1}{2^{n-k+1}} = \frac{n+1}{2^{n+2}},$$

тому $P\{\nu_1+\nu_2=7\} = 1/2^6$.

2.3. Розглянемо події A — "за договором 2 роки поспіль подано 4 позови", H_1 — "договір належить до групи із середнім числом позовів за рік, що дорівнює 2", H_2 — "договір належить до групи із середнім числом позовів за рік, що дорівнює 4". Події H_1, H_2 утворюють повну групу подій. Згідно з умовою задачі $P(H_1)=1/2, P(H_2)=1/2$. Оскільки число позовів за рік має пуассонів розподіл і числа позовів, поданих у різні роки, незалежні, то

$$P(A|H_1) = \frac{2^4}{4!}e^{-2}\cdot\frac{2^4}{4!}e^{-2} = \frac{4}{9}e^{-4},$$

$$P(A|H_2) = \frac{4^4}{4!}e^{-4}\cdot\frac{4^4}{4!}e^{-4} = \frac{1024}{9}e^{-8}.$$

Тоді за формулами Байєса ймовірність того, що навмання обраний договір належить до першої групі договорів дорівнює

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A|H_1)P(H_1)+P(A|H_2)P(H_2)} \approx 0,17578,$$

а ймовірність того, що навмання обраний договір належить до другої групи —

$$P(H_2|A) = 1-P(H_1|A) \approx 0,82422.$$

Згідно з умовою задачі середнє число очікуваних позовів у наступному році дорівнює 2, якщо договір належить до першої групи, і дорівнює 4, якщо договір належить до другої групи. Тому очікуване число позовів за договором, який 2 роки поспіль призводив до 4 страхових випадків, відповідно до формули повного математичного сподівання дорівнює

$$2\cdot 0,17578+4\cdot 0,82422 = 3,64844.$$

2.4. Позначимо через ν число ураганів за $N=20$ років. Розглянемо індикатори $I_1,\dots,I_N$, де

$$I_j = \begin{cases} 1, & \text{якщо в } j\text{-му році трапився ураган;}\\ 0, & \text{якщо в } j\text{-му році урагану не було,}\end{cases}$$

іншими словами, I_j — число ураганів в j-му році. Випадкові величини $I_1, ..., I_N$ незалежні й однаково розподілені

$$P\{I_j = 1\} = 0,05, \;\; P\{I_j = 0\} = 0,95.$$

Число ураганів ν можна подати у вигляді суми $\nu = I_1 + ... + I_N$. Величина ν має біномний розподіл з параметрами (20; 0,05). Тоді шукана ймовірність дорівнює

$$P\{\nu < 3\} = P\{\nu = 0\} + P\{\nu = 1\} + P\{\nu = 2\} =$$

$$= C_{20}^0 (0,05)^0 0,95^{20} + C_{20}^1 (0,05)^1 0,95^{19} + C_{20}^2 (0,05)^2 0,95^{18} = 0,9246.$$

2.5. Нехай ν — число поданих позовів за одним договором. Тоді

$$P\{\nu = n\} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Актуарій вважає, що

$$P\{\nu = 2\} = 3 \cdot P\{\nu = 4\}.$$

Звідси $\lambda = 2$, а отже, $D\nu = 2$.

2.6. Нехай ν_i — число позовів, поданих за i-м договором протягом року, $N = 1250$ — загальне число договорів, $S = \nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_N$ — загальне число позовів, поданих за портфелем договорів за рік (S можна вважати нормально розподіленою випадковою величиною). Оскільки випадкові величини ν_i незалежні й мають пуассонів розподіл із середнім $\lambda = 2$, то $M\nu_i = 2, D\nu_i = 2$. Отже,

$$MS = N \cdot M\nu_i = 1250 \cdot 2 = 2500,$$

$$DS = N \cdot D\nu_i = 1250 \cdot 2 = 2500.$$

Шукана ймовірність $P\{2450 < S < 2600\}$ дорівнює

$$P\{2450 < S < 2600\} =$$

$$= P\left(\frac{2450 - MS}{\sqrt{DS}} < \frac{S - MS}{\sqrt{DS}} < \frac{2600 - MS}{\sqrt{DS}}\right) =$$

$$= P\left(-1 < \frac{S - MS}{\sqrt{DS}} < 2\right) \approx N_{0,1}(2) - N_{0,1}(-1) = 0,8186.$$

2.7. Розподіл числа позовів ν знаходимо як суміш пуассонових розподілів

$$\pi_k = \int_0^{+\infty} \frac{y^k}{k!} e^{-y} f(y) dy, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

де $f(y) = 1/5$, якщо $y \in [0, 5]$, і $f(y) = 0$, якщо $y \notin [0, 5]$. Маємо

$$\pi_0 = \frac{1}{5} \int_0^5 e^{-y} dy = \frac{1 - e^{-5}}{5},$$

$$\pi_1 = \frac{1}{5} \int_0^5 y e^{-y} dy = \frac{1 - 6e^{-5}}{5}.$$

Тоді шукана ймовірність $P\{\nu \geq 2\}$ дорівнює

$$P\{\nu \geq 2\} = 1 - P\{\nu = 0\} - P\{\nu = 1\} = 1 - \pi_0 - \pi_1 = (3 + 7e^{-5})/5.$$

2.8. У разі гамма-розподілу параметра λ суміш пуассонових розподілів є від'ємним біномним розподілом

$$\pi_i = \frac{\alpha(\alpha + 1) \ldots (\alpha + i - 1)}{i!} p^\alpha q^i, \quad i = 0, 1, \ldots$$

з параметрами $p = \beta/(\beta + 1)$ та α (α>0), $p + q = 1$.

Середнє значення та дисперсія гамма-розподілу дорівнюють

$$\frac{\alpha}{\beta} = 1, \quad \frac{\alpha}{\beta^2} = 2,$$

звідки $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/2$. Тоді $p = 1/3, q = 2/3$. Отже,

$$P\{\nu = 1\} = \pi_1 = \alpha p^\alpha q = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

2.11. Моменти закінчення обробки заяв утворюють пуассонів процес з інтенсивністю $\lambda = 0,2$ заяви за 1 хв. Тому $\nu(t)$ — число подій цього потоку за фіксований проміжок часу t

має пуассонів розподіл з параметром λt. Шукана ймовірність $P\{\nu(10) \geq 2\}$ може бути подана у вигляді

$$1 - P\{\nu(10) = 0\} - P\{\nu(10) = 1\} = 1 - e^{-2} - 2e^{-2} = 0,5940.$$

2.12. Нехай N — число договорів з високим ступенем ризику, T_i — проміжок часу від початку року до моменту надходження позову за i-м договором. Тоді число договорів, за якими подаватимуться позови протягом перших t днів року, можна записати у вигляді:

$$\nu(t) = I_{\{T_1<t\}} + \ldots + I_{\{T_N<t\}}.$$

Частка таких договорів серед усієї сукупності дорівнює $\nu(t)/N$, а середнє значення

$$M\left(\frac{\nu(t)}{N}\right) = \frac{M\nu(t)}{N} = \frac{NP\{T_i < t\}}{N} = P\{T_i < t\}.$$

Оскільки випадкові величини T_i мають експоненціальний розподіл, то

$$M\left(\frac{\nu(t)}{N}\right) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

За умовою задачі

$$M\left(\frac{\nu(50)}{N}\right) = 0,3.$$

Звідси знаходимо параметр λ експоненціального розподілу: $\lambda = -\ln(0,7)/50$. Тоді шукана величина дорівнює

$$M\left(\frac{\nu(80)}{N}\right) = 1 - e^{-80\lambda} = 0,4348.$$

2.13. Точковою оцінкою параметра λ є

$$\widehat{\lambda} = \frac{0 \cdot 3288 + 1 \cdot 642 + 2 \cdot 66 + 3 \cdot 4}{4000} = \frac{786}{4000} = 0,1965.$$

Загальне число позовів ν серед договорів портфеля є пуассоновою випадковою величиною з параметром 4000λ. Оскільки середнє $M\nu = 4000 \cdot 0,1965 = 786$ велике, то можна вважати, що розподіл нормованої величини

$$\frac{\nu - M\nu}{\sqrt{D\nu}} = \frac{\nu - 4000\lambda}{\sqrt{4000\lambda}}$$

має нормальний розподіл з параметрами (0,1). Тоді

$$P\left\{-x_{0,975} < \frac{\nu - 4000\lambda}{\sqrt{4000\lambda}} < x_{0,975}\right\} = 0,95,$$

де $x_{0,975} = 1,96$ — квантиль нормального розподілу $N_{0,1}$. Звідси, підставляючи $\nu = 786$, знаходимо довірчий інтервал для параметра λ:

$$P\{0,183 < \lambda < 0,211\} = 0,95.$$

2.14. Гіпотеза про те, що серед поданих 1 000 позовів до компанії не було випадків шахрайства, відхиляється на рівні значущості 0,005.

6.3. До розділу 3

3.1.

u	R	u	R
0	0,5905	5	0,0043
1	0,3856	6	0,0005
2	0,1424	7	0,0001
3	0,0624	8	0
4	0,0143		

3.2. Візьмемо 1 млн грн за одиницю виміру грошових сум. Позначимо через I_1, I_2 індикатори подій "пожежа відбулася на i-му об'єкті", $i = 1, 2$. Тоді $P\{I_1 = 1\} = q_1 = 0,2$, $P\{I_1 = 0\} = 1 - q_1 = 0,8$, $P\{I_2 = 1\} = q_2 = 0,1$, $P\{I_2 = 0\} = 1 - q_2 = 0,9$. Індивідуальні позови за договорами дорівнюють $X_1 = I_1Y_1$, $X_2 = I_2Y_2$ відповідно, при цьому події I_1, I_2 незалежні.

Обчислимо ймовірність банкрутства $R = P\{X_1 + X_2 > u\}$, застосувавши формулу повної ймовірності. За повну групу подій розглянемо $H_1 = \{I_1 = 0, I_2 = 0\}$, $H_2 = \{I_1 = 1, I_2 = 0\}$, $H_3 = \{I_1 = 0, I_2 = 1\}$, $H_4 = \{I_1 = 1, I_2 = 1\}$.

Тоді

$$R = P\{X_1 + X_2 > u\} = P\{X_1 + X_2 > u \,|H_1\}P\{H_1\}+$$

$$+P\{X_1 + X_2 > u \,|H_2\}P\{H_2\} + P\{X_1 + X_2 > u \,|H_3\}P\{H_3\}+$$

$$+P\{X_1 + X_2 > u \,|H_4\}P\{H_4\} =$$

$$= P\{I_1Y_1 + I_2Y_2 > u \,|I_1 = 0,\, I_2 = 0\}(1-q_1)(1-q_2)+$$
$$+P\{I_1Y_1 + I_2Y_2 > u \,|I_1 = 1,\, I_2 = 0\}q_1(1-q_2)+$$
$$+P\{I_1Y_1 + I_2Y_2 > u \,|I_1 = 0,\, I_2 = 1\}(1-q_1)q_2+$$
$$+P\{I_1Y_1 + I_2Y_2 > u \,|I_1 = 1,\, I_2 = 1\}q_1q_2 =$$
$$= P\{Y_1 > u\}q_1(1-q_2)+P\{Y_2 > u\}(1-q_1)q_2+P\{Y_1+Y_2 > u\}q_1q_2. \tag{6.3.1}$$

Зазначимо, що

$$P\{Y_1 > u\} = 1 - P\{Y_1 < u\} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } u \le 0, \\ 1-u, & \text{якщо } 0 < u \le 1, \\ 0, & \text{якщо } u > 1, \end{cases}$$

$$P\{Y_2 > u\} = 1 - P\{Y_2 < u\} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } u \le 0, \\ 1-u/2, & \text{якщо } 0 < u \le 2, \\ 0, & \text{якщо } u > 2, \end{cases}$$

$$P\{Y_1 + Y_2 > u\} = \int\limits_u^{+\infty} f_{Y_1+Y_2}(x)dx,$$

де щільність суми $Y_1 + Y_2$ знаходиться як згортка щільностей:

$$f_{Y_1+Y_2}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1}(x-y)f_{Y_2}(y)dy =$$

$$= \int\limits_{x-2}^{x} f_{Y_1}(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ x/2, & \text{якщо } 0 \le x < 1, \\ 1/2, & \text{якщо } 1 \le x < 2, \\ (3-x)/2, & \text{якщо } 2 \le x < 3, \\ 0, & \text{якщо } x \ge 3. \end{cases}$$

Тоді

$$P\{Y_1 + Y_2 > u\} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } u \le 0, \\ 1-u^2/4, & \text{якщо } 0 \le u < 1, \\ 5/4 - u/2, & \text{якщо } 1 \le u < 2, \\ (3-u)^2/4, & \text{якщо } 2 \le u < 3, \\ 0, & \text{якщо } u \ge 3. \end{cases}$$

Згідно з (6.3.1) імовірність банкрутства дорівнює

$$R(u) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } u < 0, \\ 0,28 - 0,22u - 0,005u^2, & \text{якщо } 0 \le u \le 10^6, \\ 0,105 - 0,05u, & \text{якщо } 10^6 \le u \le 2\cdot 10^6, \\ 0,045 - 0,03u + 0,005u^2, & \text{якщо } 2\cdot 10^6 \le u \le 3\cdot 10^6, \\ 0, & \text{якщо } u \ge 3\cdot 10^6. \end{cases}$$

3.3. Візьмемо величину 100$ за одиницю виміру грошових сум. Тоді індивідуальний позов X_i до компанії застрахованого першої групи має розподіл

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,98 & 0,02 \end{pmatrix},$$

застрахованого другої групи —

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,98 & 0,02 \end{pmatrix},$$

застрахованого третьої групи —

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix},$$

застрахованого четвертої групи —

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix},$$

при цьому MX_i дорівнює 0,02; 0,04; 0,1 та 0,2 у 1-й, 2-й, 3-й, 4-й групах відповідно, DX_i дорівнює 0,0196; 0,0784; 0,09; 0,36 у 1-й, 2-й, 3-й, 4-й групах відповідно. $X_1, X_2, \ldots, X_{1800}$ — незалежні випадкові величини. Тоді математичне сподівання MS та дисперсія DS сумарного позову $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_{1800}$ до компанії дорівнюють

$$MS = M(X_1 + X_2 + \ldots + X_{1800}) =$$
$$= 500\cdot 0,02 + 500\cdot 0,04 + 300\cdot 0,1 + 500\cdot 0,2 = 160,$$
$$DS = D(X_1 + X_2 + \ldots + X_{1800}) =$$

$$= 500 \cdot 0,0196 + 500 \cdot 0,0784 + 300 \cdot 0,09 + 500 \cdot 0,36 = 256.$$

Знайдемо величину капіталу компанії, за якого ймовірність банкрутства компанії дорівнює 0,05. Маємо

$$0,05 = P\{S > u\} = 1 - N_{0;1}\left(\frac{u - MS}{\sqrt{DS}}\right),$$

$$N_{0;1}\left(\frac{u - 160}{\sqrt{256}}\right) = 0,95,$$

звідси

$$\frac{u - 160}{16} = 1,645.$$

Мінімальний капітал компанії має бути не менший $u = 186,32$ або 18 632\$.

3.4. Якщо страхові надбавки l_i за договорами пропорційні MX_i, то $p_1 = 2,33$ \$, $p_2 = 4,66$ \$, $p_3 = 11,65$ \$, $p_4 = 23,29$ \$; якщо страхові надбавки l_i за договорами пропорційні дисперсіям DX_i, то $p_1 = 2,20$ \$, $p_2 = 4,81$ \$, $p_3 = 10,93$ \$, $p_4 = 23,70$ \$; якщо страхові надбавки l_i за договорами пропорційні середньоквадратичним відхиленням $\sqrt{DX_i}$, то $p_1 = 2,61$ \$, $p_2 = 5,23$ \$, $p_3 = 11,32$ \$, $p_4 = 22,63$ \$.

3.5. Обчислимо середнє та дисперсію величини дійсно поданого позову Y:

$$MY = \int_0^L x\lambda e^{-\lambda x}dx + Le^{-\lambda L} = \frac{1 - e^{-\lambda L}}{\lambda},$$

$$MY^2 = \int_0^L x^2\lambda e^{-\lambda x}dx + L^2 e^{-\lambda L} = \frac{2}{\lambda^2}(1 - e^{-\lambda L}) - \frac{2L}{\lambda}e^{-\lambda L},$$

$$DY = \frac{1 - 2\lambda L e^{-\lambda L} - e^{-2\lambda L}}{\lambda^2}.$$

Для першої групи клієнтів параметри $\lambda = 1$, $L = 2,5$, тоді $MY = 0,9179$, $DY = 0,5828$. Для другої групи клієнтів параметри $\lambda = 2$, $L = 5$, тоді $MY = 0,5$, $DY = 0,2498$.

Отже, середнє та дисперсія індивідуального позову X до компанії дорівнюють

$$MX = MY \cdot P\{I = 1\},$$

$$DX = DY \cdot P\{I = 1\} + (MY)^2 P\{I = 1\}P\{I = 0\}.$$

Для клієнтів першої групи маємо $MX = 0,09179$, $DX = 0,13411$. Для клієнтів другої групи маємо $MX = 0,025$, $DX = 0,02436$.

Математичне сподівання MS та дисперсія DS сумарного позову S до компанії дорівнюють

$$MS = 500 \cdot 0,09179 + 2000 \cdot 0,025 = 95,89,$$

$$DS = 500 \cdot 0,13411 + 2000 \cdot 0,02436 = 115,78.$$

Знайдемо величину капіталу компанії, за якого ймовірність банкрутства компанії дорівнює 0,05. Маємо

$$0,05 = P\,(S > u) = 1 - N_{0;1}\left(\frac{u - MS}{\sqrt{DS}}\right),$$

$$N_{0;1}\left(\frac{u - 95,89}{\sqrt{115,78}}\right) = 0,95,$$

звідси

$$\frac{u - 95,89}{\sqrt{115,78}} = 1,645.$$

Мінімальний капітал компанії має бути не менший ніж $u = 113,59$.

3.6. Якщо страхові надбавки l_i за договорами пропорційні MX_i, то $p_1 = 0,109$ од., $p_2 = 0,03$ од.; якщо страхові надбавки l_i за договорами пропорційні дисперсіям DX_i, то $p_1 = 0,112$ од., $p_2 = 0,029$ од.; якщо страхові надбавки l_i за договорами пропорційні $\sqrt{DX_i}$, то $p_1 = 0,105$ од., $p_2 = 0,031$ од.

3.7. Мінімальний капітал компанії має бути не менший ніж 1460,4487 або 14 604 487 грн.

3.8. Далі значення p_i $(i = 1, 2, \ldots 5)$ наведені в гривнях. Якщо страхові надбавки l_i за договорами пропорційні MX_i, то $p_1 = 110,64$, $p_2 = 442,56$, $p_3 = 995,76$, $p_4 = 2\,766$, $p_5 = 11\,064$; якщо страхові надбавки l_i за договорами пропорційні DX_i, то $p_1 = 101,91$, $p_2 = 415,11$, $p_3 = 950,46$, $p_4 = 2\,728,8$, $p_5 = 11\,734,03$; якщо страхові надбавки l_i за договорами пропорційні $\sqrt{DX_i}$, то $p_1 = 122,58$, $p_2 = 463,53$, $p_3 = 1\,016,12$, $p_4 = 2\,747,26$, $p_5 = 10\,680,69$.

3.9. Для розрахунків зручно взяти 250 000 грн за одиницю виміру грошових сум.

u	R	u	R
0	0,7732	8	0,0238
1	0,7084	9	0,0082
2	0,5626	10	0,0052
3	0,379	11	0,0012
4	0,2566	12	0,0004
5	0,1414	13	0
6	0,0982		
7	0,0418		

3.10. Мінімальний капітал компанії має бути не менший ніж $u = 137\,968,6$ \$.

3.11.

$$P\{S > 4\} = 1 - N_{0;1}\left(\frac{4 - MS}{\sqrt{DS}}\right) = 0,0062.$$

3.12. Сумарні виплати за портфелем договорів дорівнюють

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N,$$

де $X_k = I_k \cdot Y_k$ — величина індивідуального позову за k-м договором, I_k — індикатор події "відбувся страховий випадок за k-м договором", Y_k — величина дійсно поданого позову за k-м договором.

Дисперсія сумарних виплат дорівнює

$$DS = DX_1 + DX_2 + \ldots + DX_N = 100 \cdot DX' + 200 \cdot DX'',$$

де DX', DX'' — дисперсія страхової виплати за договором першого та другого виду відповідно. Відомо, що для випадкової величини $X = IY$

$$DX = DY P\{I = 1\} + (MY)^2 P\{I = 1\} P\{I = 0\}.$$

Тоді $DX' = 2567$, $DX'' = 1719$, а отже, $DS = 600\,500$.

3.13. Нехай S_J, S_K, S_L — сумарні величини поданих позовів у містах J, K та L відповідно, тоді $S = S_J + S_K + S_L$. Застосовуючи незалежність доданків S_J, S_K, S_L, можна обчислити генератрису нормованих моментів випадкової величини S

$$\psi_S(z) = M\exp\{zS\} = M\exp\{z(S_J + S_K + S_L)\} =$$

$$= M\exp\{zS_J\} M\exp\{zS_K\} M\exp\{zS_L\} = (1 - 2z)^{-10}.$$

Розкладаємо функцію $\psi_S(z) = (1-2z)^{-10}$ у ряд за степенями z:

$$\psi_S(z) = \frac{1}{(1-2z)^{10}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{10 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (9+n)}{n!} 2^n z^n.$$

Звідси маємо

$$MS^n = 10 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (9+n) \cdot 2^n.$$

Зокрема,

$$MS^3 = 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 8 = 10560.$$

3.14. Сумарний позов до страхової компанії

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N,$$

де X_i — величина індивідуального позову за i-м договором ($i = 1, 2, \ldots, N$). Очевидно, що $MX_i = 10^3$, $DX_i = 10^6$, тоді премія $p = MX_i + 100 = 1100$, а сумарна величина внесених премій $Np = 100 \cdot 1100 = 110000$. Можна вважати, що випадкова величина S як сума великого числа однаково розподілених доданків має нормальний розподіл, тоді шукана ймовірність

$$P(S > Np) = P\left(\frac{S - MS}{\sqrt{DS}} > \frac{Np - MS}{\sqrt{DS}}\right) =$$

$$= P\left(\frac{S - MS}{\sqrt{DS}} > 1\right) = 1 - N_{0,1}(1) = 0,1587.$$

3.15. Позначимо через N — число укладених договорів, X_i — індивідуальний позов за i-м договором ($i = 1, 2, \ldots, N$), $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$ — сумарний позов до страхової компанії. Вважатимемо, що премія за одним договором дорівнює $p = (1+\theta)MX_i$. Згідно з умовою $P\{S < Np\} = 0,95$. Але

$$P\{S < Np\} = P\left(\frac{S - MS}{\sqrt{DS}} < \frac{Np - MS}{\sqrt{DS}}\right) \approx$$

$$\approx N_{0,1}\left(\frac{Np - MS}{\sqrt{DS}}\right) = N_{0,1}\left(\frac{\sqrt{N}\theta MX_i}{\sqrt{DX_i}}\right).$$

Шукане число договорів знаходимо з рівняння

$$\frac{\sqrt{N}\theta MX_i}{\sqrt{DX_i}} = x_{0{,}95},$$

де $x_{0{,}95} = 1,645$ — 0,95-квантиль стандартного нормального розподілу, $MX_i = 60\,000$, $DX_i = 314 \cdot 10^8$. Число договорів дорівнює 590.

3.16. Загальна сума премій за портфелем договорів дорівнює

$$MS + 1,25\sqrt{DS} = N \cdot MX + 1,25\sqrt{NDX},$$

де X — величина індивідуального позову за одним договором. Тоді премія за одним договором

$$MX + 1,25\frac{\sqrt{DX}}{\sqrt{N}} = 350. \qquad (6.3.2)$$

Оскільки

$$MX = P\{I=1\}MY,$$

$$MX^2 = P\{I=1\}MY^2,$$

$$DX = MX^2 - (MX)^2,$$

де $P\{I=1\} = 1/2$,

$$MY = 1000Me^{-0{,}05t} = 1000 \cdot (1 - e^{-1}),$$

$$MY^2 = (1000)^2 Me^{-0{,}1t} = 10^6 \cdot (1 - e^{-2})/2,$$

то з рівняння (6.3.2) знаходимо, що $N = 158$.

6.4. До розділу 4

4.1. а) Генератриса числа позовів ν дорівнює

$$\pi(z) = Mz^\nu = \sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1}pz^n = zp\sum_{n=1}^{\infty}((1-p)z)^{n-1} =$$

$$= \frac{zp}{1 - z(1-p)}.$$

Перетворення Лапласа величини позову має вигляд

$$\varphi(s) = Me^{-sY_i} = \int_0^\infty e^{-sx}\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda}{s+\lambda}.$$

Згідно з рівністю (4.1.2) перетворення Лапласа $\Phi(s)$ сумарного позову S_ν дорівнює

$$\Phi(s) = \pi(\varphi(s)) = \frac{\varphi(s)p}{1 - \varphi(s)(1-p)} = \frac{\lambda p}{s + \lambda p}.$$

Функція $\Phi(s) = \lambda p/(s + \lambda p)$ є перетворенням Лапласа експоненціального розподілу з параметром λp:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda p e^{-\lambda p x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Імовірність банкрутства компанії дорівнює

$$R(u) = \int_u^{+\infty} f(x)dx = e^{-\lambda p u}.$$

4.2. Розподіл сумарного позову S_ν дорівнює

k	$P\{S_\nu = k\}$	k	$P\{S_\nu = k\}$
0	0,1	5	0,095
1	0,15	6	0,0408
2	0,22	7	0,0126
3	0,215	8	0,0024
4	0,164	9	0,0002

Імовірність банкрутства

$$R(u) = P\{S_\nu > u\} = \sum_{k=u+1}^{\infty} P\{S_\nu = k\}.$$

Для $u = 0, 1, \dots 9$ маємо

u	$R(u)$	u	$R(u)$
0	0,9	5	0,056
1	0,75	6	0,0152
2	0,53	7	0,0026
3	0,315	8	0,0002
4	0,151	9	0,0000

4.3. Події $\{\nu = n\}, n = 0, 1, 2$ утворюють повну групу подій. Згідно з формулою повного математичного сподівання маємо

$$M\exp\{S_\nu\} = \sum_{n=0}^{2} M\left(\exp\{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu\} | \nu = n\right) P\{\nu = n\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{2} M(\exp\{Y_1\})^n P\{\nu = n\} = \frac{1}{3}(1 + M\exp\{Y_1\} + (M\exp\{Y_1\})^2).$$

Оскільки $M\exp\{Y_1\} = 2$, то $M\exp\{S_\nu\} = 7/3$.

4.4. Застосувавши формулу повного математичного сподівання, маємо

$$M\exp\{tS_\nu\} = \sum_{k=0}^{5} C_5^k (0,1)^k (0,9)^{5-k} \cdot (0,5e^t + 0,5e^{2t})^k =$$

$$= (0,05 \cdot (e^t + e^{2t}) + 0,9)^5.$$

4.6. Генератриса $G(z)$ сумарного позову S_ν дорівнює

$$G(z) = \pi(g(z)),$$

де $\pi(z)$ — генератриса числа позовів ν:

$$\pi(z) = Mz^\nu = 0,5 + 0,3z + 0,2z^2,$$

$g(z)$ — генератриса величини поданого позову Y_i:

$$g(z) = Mz^{Y_i} = 0,8z + 0,2z^4,$$

тоді генератриса $G(z)$ сумарного позову S_ν має вигляд

$$G(z) = \pi(g(z)) = 0,5 + 0,24z + 0,128z^2 + 0,06z^4 + 0,064z^5 + 0,008z^8.$$

Математичне сподівання сумарного позову S_ν знаходимо диференціюванням $G(z)$ за z у точці 1:

$$MS_\nu = G'(1) = 1,12.$$

Більше того, коефіцієнт при z^n дорівнює ймовірності $P\{S_\nu = n\}$, $n = 0, 1, \ldots, 8$. Розподіл сумарного позову S_ν наведений далі:

0	1	2	4	5	8
0,5	0,24	0,128	0,06	0,064	0,008

Шукана ймовірність $P\{S_\nu > 2MS_\nu\}$ дорівнює

$$P\{S_\nu > 2,24\} = P\{S_\nu \geq 3\} =$$

$$= 1 - P\{S_\nu = 0\} - P\{S_\nu = 1\} - P\{S_\nu = 2\} = 0,132.$$

4.7. Див. розв'язання задачі 4.6.
Розподіл сумарного позову S_ν наведений далі:

0	10	20	30
0,8792	0,1024	0,0176	0,0008

$$P\{S_\nu > MS_\nu + 2\sqrt{DS_\nu}\} =$$

$$= P\{S_\nu = 10\} + P\{S_\nu = 20\} + P\{S_\nu = 30\} = 0,1208.$$

4.8. $MS_\nu = 150$, $DS_\nu = 375$.

4.9. Розподіл сумарного позову S_ν дорівнює

0	1	2	3	4	5	...
0,1827	0,1553	0,1902	0,1553	0,1175	0,0816	...

$MS_\nu = \lambda MY_i = 2,72$; $DS_\nu = \lambda MY_i^2 = 5,1$.

4.11. Сума $S_1 + S_2$ має складений пуассонів розподіл з параметром $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 8$ і страховими виплатами 1, 2, 3, 4 з імовірностями 0,05; 0,15; 0,425; 0,375 відповідно.

4.12. Оскільки страхові виплати Y_i — дискретні випадкові величини, то складений пуассонів розподіл є дискретним і його генератриса дорівнює

$$G(z) = \exp\{\lambda(g(z) - 1)\},$$

де $g(z) = Mz^{Y_i}$ — генератриса величини страхової виплати Y_i. Моменти складеного пуассонового розподілу дорівнюють

$$MS_\nu = \lambda MY_i, \quad DS_\nu = \lambda MY_i^2.$$

Звідси знаходимо $MY_i = 2,3$; $MY_i^2 = 5,9$. Тоді розподіл величин виплат Y_i знаходиться із системи рівнянь:

$$MY_i = P\{Y_i = 1\} + 2P\{Y_i = 2\} + 3P\{Y_i = 3\},$$

$$MY_i^2 = P\{Y_i = 1\} + 4P\{Y_i = 2\} + 9P\{Y_i = 3\},$$

$$1 = P\{Y_i = 1\} + P\{Y_i = 2\} + P\{Y_i = 3\}.$$

Маємо

$$P\{Y_i = 1\} = 0,2, \quad P\{Y_i = 2\} = 0,3, \quad P\{Y_i = 3\} = 0,5.$$

Отже, генератриса величини страхової виплати Y_i запишеться так:

$$g(z) = Mz^{Y_i} = 0,2z + 0,3z^2 + 0,5z^3,$$

а генератриса сумарного позову до компанії —

$$G(z) = \exp\{0,2z(2 + 3z + 5z^2) - 2\}.$$

Розкладаючи генератрису сумарного позову до компанії в ряд за степенями z, маємо

$$G(z) = e^{-2}\left(1 + 0,4z + 0,68z^2 + \frac{3,752}{3}z^3 + \dots\right).$$

Звідси

$$P\{S_\nu = 3\} = \frac{3,752}{3}e^{-2} \approx 0,17.$$

4.13. $DS_\nu = 40$.

4.14. Застосуємо теорему 4.2.1. Число позовів "сумарного" портфеля договорів має розподіл Пуассона із середнім $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 5$, а розподіл величини поданого позову є сумішшю з вагами $\lambda_1/\lambda = 2/5$ та $\lambda_2/\lambda = 3/5$ рівномірних розподілів на відрізках $[0,1000]$ та $[0,200]$ відповідно. Отже, щільність величини поданого позову Y дорівнює

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0; \\ 17/5000, & \text{якщо } 0 < x < 200; \\ 2/5000, & \text{якщо } 200 < x < 1000; \\ 0, & \text{якщо } x > 1000. \end{cases}$$

Величина страхової виплати B пов'язана з величиною поданого позову Y співвідношенням

$$B = \begin{cases} 0, & \text{якщо } Y \le 100; \\ Y - 100, & \text{якщо } Y > 100. \end{cases}$$

Тому середнє значення однієї страхової виплати дорівнює

$$MB = \int_{100}^{1000} (x - 100)f(x)dx = 177.$$

4.15. Для точного розрахунку розподілу $P_n = P\{S = n\}$ складеної пуассонової величини S треба застосувати рекурентні формули (теорема 4.2.3).

4.16. Застосуємо рекурентні формули для розрахунку складеного від'ємного біномного розподілу:

$$P_n = \sum_{i=1}^{n}\left(q + \frac{(\alpha-1)q}{n}\,i\right)p_i P_{n-i}, \ \ n = 1,2,\dots; \quad P_0 = p^\alpha,$$

де $P\{Y_i = k\} = p_k, \ k = 0,1,\dots$

Маємо

$$P_0 = (0,5)^3 = 0,125;$$

$$P_1 = (0,5 + (3-1)\cdot 0,5 \cdot 1/1)\cdot 0,6 \cdot 0,125 = 0,1125;$$

$$P_2 = (0,5 + (3-1)\cdot 0,5\cdot 1/2)\cdot 0,6\cdot 0,1125+$$

$$+(0,5 + (3-1)\cdot 0,5\cdot 2/2)\cdot 0,3\cdot 0,125 = 0,1237;$$

$$P_3 = 0,12; \quad P_4 = 0,1052; \quad P_5 = 0,0902; \quad \text{і т.д.}$$

$MS_\nu = 4,5$; $DS_\nu = 14,85$.

4.17.

$$R = 1 - N_{0;1}\left(\frac{u - MS_\nu}{\sqrt{DS_\nu}}\right), \quad MS_\nu = 6, \quad DS_\nu = 4.$$

Мінімальний капітал компанії має бути не менший $u = 9,3$ од.

4.19. Оскільки Y_i — дискретні випадкові величини, то складений пуассонів розподіл є дискретним і його генератриса дорівнює

$$G(z) = e^{\lambda(g(z)-1)},$$

де $g(z)$ — генератриса Y_i,

$$g(z) = Mz^{Y_i} = 0,5z + 0,3z^5 + 0,2z^{10}.$$

Тому

$$G(z) = \exp\{63(0,5z + 0,3z^5 + 0,2z^{10}) - 63\}.$$

Диференціюванням $G(z)$ за z у точці $z = 1$ знаходимо моменти величини сумарного позову:

$$MS_\nu = G'(1) = 252, \quad MS_\nu(S_\nu - 1) = G''(1) = 65016,$$

$$DS_\nu = MS_\nu(S_\nu - 1) + MS_\nu - (MS_\nu)^2 = 1764.$$

Шукана ймовірність дорівнює

$$P\{S_\nu > 315\} = P\left\{\frac{S_\nu - MS_\nu}{\sqrt{DS_\nu}} > \frac{315 - MS_\nu}{\sqrt{DS_\nu}}\right\} \approx$$

$$\approx 1 - N_{0,1}(1,5) = 0,067.$$

6.5. До розділу 5

5.1. Події H_1 — "відбувся страховий випадок", H_2 — "страхового випадку не було" утворюють повну групу подій. Тоді ймовірність події A — "компанія збанкрутує" обчислюється за формулою повної ймовірності

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2),$$

де $P(H_1) = 1/3$, $P(H_2) = 2/3$, $P(A|H_2) = 0$.

Позначимо через T_1 — момент надходження дійсно поданого позову, Y_1 — величину дійсно поданого позову, тоді компанія не збанкрутує, якщо

$$u_0 + cT_1 - Y_1 \geq 0.$$

Тоді ймовірність банкруства за умов, що страховий випадок відбувся, дорівнює

$$P(A|H_1) = 1 - P\{u_0 + cT_1 - Y_1 \geq 0\} = P\{u_0 + cT_1 < Y_1\} =$$

$$= P\{1 + 3T_1 < 5\} = P\{T_1 < 4/3\} = \int\limits_1^{4/3} \frac{2}{t^3} dt = \frac{7}{16}.$$

Отже, ймовірність банкрутства компанії дорівнює $7/48$.

5.2. Розглянути події H_1 — "величина дійсно поданого позову набуває значення 100", H_2 — "величина дійсно поданого позову — 200" за повну групу подій. Імовірність події A — "компанія

збанкрутує" обчислити за формулою повної ймовірності. Див. розв'язання задачі 5.1.

Відповідь: $3/4$.

5.3. У кожен момент часу $1, 2, \ldots$ подається точно один позов, тому інтенсивність процесу позовів $\lambda = 1$. Середня величина дійсно поданого позову $m = MY_i = 5$. Тоді швидкість надходження премій c дорівнює $(1 + \theta)\lambda m = 6$.

Якщо

$$u_0 + cT_1 - Y_1 \geq 0,$$
$$u_0 + cT_2 - (Y_1 + Y_2) < 0,$$

то в момент T_2 подання другого позову компанія збанкрутує. Тому шукана ймовірність дорівнює

$$P\{Y_1 \leq 7, Y_1 + Y_2 > 13\}.$$

Оскільки величини Y_1, Y_2 — незалежні, рівномірно розподілені на [0,10], то точка (Y_1, Y_2) рівномірно розподілена в квадраті $[0, 10] \times [0, 10]$. Останню ймовірність можна обчислити як геометричну.

Відповідь: 0,08.

5.4. Відносну страхову надбавку θ знайдемо із характеристичного рівняння

$$Me^{zX} = 1 + (1 + \theta)mz,$$

де

$$m = MX = 1,75,$$
$$Me^{zX} = \frac{1}{4}e^z + \frac{3}{4}e^{2z}.$$

Маємо

$$\frac{1}{4}e^z + \frac{3}{4}e^{2z} = 1 + (1 + \theta)\frac{7}{4}z.$$

Характеристичний коефіцієнт $r = \ln 2$ є розв'язком характеристичного рівняння, тому

$$\frac{1}{4}e^r + \frac{3}{4}e^{2r} = 1 + (1 + \theta)\frac{7}{4}r.$$

Звідси $\theta \approx 1,061$.

5.5. Відносна страхова надбавка θ є розв'язком характеристичного рівняння

$$Me^{rY} = 1 + (1 + \theta)MY \cdot r,$$

де $MY = 1/\lambda = 1/3$, $Me^{zY} = \psi(z) = \varphi(-z) = \frac{3}{-z+3}$. Маємо

$$\frac{3}{-r+3} = 1 + (1+\theta)\frac{r}{3},$$

де $r = 1$ за умовою. Звідси $\theta = 1/2$.

5.8. Скористатися тим, що $R(0) = \dfrac{1}{1+\theta}$. Звідси $\theta = 2/3$.

5.9. Відомо, що якщо величина позову має експоненціальний розподіл з параметром $1/m$, то ймовірність банкрутства дорівнює

$$R(u) = \frac{1}{1+\theta} \cdot \exp\left(-\frac{\theta}{(1+\theta)m}u\right).$$

Звідси

$$m = -\frac{\theta u}{(1+\theta)\ln((1+\theta)R(u))}.$$

Оскільки інтенсивність процесу позовів λ пов'язана зі швидкістю надходження позовів c, відносною страховою надбавкою θ та середньою величиною дійсно поданого позову m рівністю

$$c = (1+\theta)\lambda m,$$

то шукана величина λ дорівнює

$$\lambda = \frac{c}{(1+\theta)m} = -\frac{c\ln((1+\theta)R(u))}{\theta u} = 1,75.$$

5.10. Перетворення Лапласа величини позову

$$\varphi(s) = \frac{1}{2(s+2)} + \frac{3}{s+4}$$

визначене для $s > -2$. Тому генератриса моментів $\psi(z)$ визначена для $z < 2$ і задається формулою

$$\psi(z) = \varphi(-z) = \frac{-7z+16}{2(-z+2)(-z+4)}.$$

Середнє значення величини позову дорівнює $m = 5/16$, відносна страхова надбавка $\theta = 3/5$.

Характеристичний коефіцієнт r є додатним розв'язком рівняння

$$\frac{-7z+16}{2(-z+2)(-z+4)} = 1 + \left(1+\frac{3}{5}\right)\frac{5z}{16}.$$

Це рівняння має три корені: $z_0 = 0$, $z_1 = 3$, $z_2 = 1$. Оскільки генератриса моментів визначена для $z < 2$, то рівняння має єдиний додатний розв'язок $r = 1$. Це і є характеристичний коефіцієнт.

5.11. Перетворенням Лапласа $\varphi(s)$ величини позову є

$$\varphi(s) = \frac{3}{9(s+3)} + \frac{48}{9(s+6)} = \frac{17s+54}{3(s+3)(s+6)},$$

середнє значення величини позову дорівнює $m = 5/27$, відносна страхова надбавка $\theta = 4/5$.

Залежність імовірності банкрутства $R(u)$ від величини капіталу u знаходиться оберненням перетворення Лапласа ймовірності банкрутства $\rho(s) = \dfrac{1}{9(s+4)} + \dfrac{4}{9(s+2)}$ і дорівнює $R(u) = e^{-4u}/9 + 4e^{-2u}/9$. Відносна похибка в разі заміни ймовірності банкрутства $R(u)$ оцінкою Лундберга дорівнює $\dfrac{5}{9} - \dfrac{e^{-2u}}{9}$, для асимптотики Крамера–Лундберга — $e^{-2u}/4$.

5.12. $R(u) = 24e^{-u}/35 + e^{-6u}/35$, $u \geq 0; r = 1$.

5.13. Перетворення Лапласа $\varphi(s)$ величини позову дорівнює $\varphi(s) = 9/(4s+3)^2$, середнє значення величини позову $m = \alpha/\beta = 8/3$, відносна страхова надбавка $\theta = \dfrac{c}{\lambda m} - 1 = 7/8$. Оберненням перетворення Лапласа ймовірності банкрутства

$$\rho(s) = \frac{16}{3} \cdot \frac{9+8s}{104s+21+80s^2} = -\frac{1}{20s+21} + \frac{7}{3(4s+1)}$$

знаходимо залежність імовірності банкрутства $R(u)$ від величини капіталу u:

$$R(u) = -\frac{1}{20}e^{-21u/20} + \frac{7}{12}e^{-u/4}.$$

Бібліоґрафія

1. Актуарная математика [Текст] / Н. Бауэрс [та ін.] – М.: Янус-К, 2001. – 656 с.

2. Бондаренко, Я. С. Теорія ризику в страхуванні [Текст] / Я. С. Бондаренко, В. М. Турчин, Є. В. Турчин. – Д.: РВВ ДНУ, 2008. – 112 с.

3. Фалин, Г. И. Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем [Текст] / Г. И. Фалин. – М.: АНКИЛ, 2002. – 262 с.

4. Фалин, Г. И. Математический анализ рисков в страховании [Текст] / Г. И. Фалин. – М.: Росс. юрид. издат. дом, 1994. – 130 с.

5. Фалин, Г. И. Актуарная математика в задачах [Текст] / Г. И. Фалин, А. И. Фалин. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 192 с.

6. Фалин, Г. И. Введение в актуарную математику (математические модели в страховании) [Текст]: учеб. пособие / Г. И. Фалин, А. И. Фалин. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994. — 110 с.

7. Фалин, Г. И. Теория риска для актуариев в задачах [Текст] / Г. И. Фалин, А. И. Фалин. – М.: Мир, 2004. – 240 с.

8. Currie, I. D. Loss Distributions [Text] / I. D. Currie. — Edinburgh: Heriot-Watt University, 1992. — 82 p.

9. Daykin, C. D. Practical Risk Theory for Actuaries [Text] / C. D. Daykin, T. Pentikäinen, M. Pesonen. – Chapman & Hall, 1994. – 546 p.

Темплан 2010, поз. 22

Навчальне видання

Яна Сергіївна Бондаренко
Валерій Миколайович Турчин
Євген Валерійович Турчин

Теорія ризику в страхуванні
Основні поняття, приклади, задачі

Редактор А.Я. Пащенко
Техредактор Л.П. Замятіна
Коректор А.А. Гриженко

Підписано до друку 25.02.10. Формат $60 \times 84/16$. Папір друкарський. Друк плоский. Ум. друк. арк. 10,5. Обл.-вид. арк. 8,8. Ум. фарбовідб. 10,5. Тираж 150 пр. Зам. №

РВВ ДНУ, просп. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49010.
Друкарня ДНУ, вул. Наукова, 5, м. Дніпропетровськ, 49050