Глава 4

Дискретное вероятностное пространство

4.3 Основные понятия комбинаторики

В классической модели задача вычисления вероятности события A сводится к подсчету отношения числа $n(A)$ исходов, входящих в A (благоприятствующих A), к числу $n(\Omega)$ исходов в Ω (числу всех исходов). При подсчете этих чисел важную роль играют методы комбинаторики (раздел математики, изучающий конечные множества).

Правило умножения (основной принцип комбинаторики). Пусть A и B — произвольные множества. Каждые два элемента $a \in A$ и $b \in B$ определяют упорядоченную пару элементов (a, b). Множество всех упорядоченных пар (a, b), $a \in A$, $b \in B$ называют *декартовым произведением* множеств A и B и обозначают $A \times B$.

Правило умножения. *Число $n(A \times B)$ элементов декартова произведения $A \times B$ конечных множеств A и B равно произведению $n(A)n(B)$ числа $n(A)$ элементов множества A и числа $n(B)$ элементов множества B:*

$$n(A \times B) = n(A)n(B).$$

Доказательство. Декартово произведение $A \times B$ представим в виде объединения:

$$A \times B = (\{a_1\} \times B) \cup (\{a_2\} \times B) \cup \ldots \cup (\{a_{n(A)}\} \times B)$$

непересекающихся множеств $\{a_i\} \times B$, $i = 1, 2, \ldots, n(A)$. Число элементов каждого из множеств $\{a_i\} \times B$ равно $n(B)$. Поэтому

$$n(A \times B) = n(\{a_1\} \times B) + n(\{a_2\} \times B) + \ldots + n(\{a_{n(A)}\} \times B) =$$

$$= n(B) + n(B) + \ldots + n(B) = n(A)n(B).$$

Пример. *Пусть $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{4, 5, 6, 7\}$. Найти число элементов в $A \times B$.*

Решение. Согласно правилу умножения

$$n(A \times B) = n(A)n(B) = 3 \cdot 4 = 12.$$

Декартовым произведением множеств $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(k)}$ будем называть множество упорядоченных последовательностей

$$(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)}),\ a^{(i)} \in A^{(i)},\ i = 1, 2, \ldots, k,$$

и будем обозначать

$$A^{(1)} \times A^{(2)} \times \ldots \times A^{(k)}.$$

Используя метод математической индукции, устанавливаем следующее *общее правило умножения.*

Число $n(A^{(1)} \times A^{(2)} \times \ldots \times A^{(k)})$ элементов декартова произведения $A^{(1)} \times A^{(2)} \times \ldots \times A^{(k)}$ множеств $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(k)}$ равно произведению $n(A^{(1)})n(A^{(2)}) \ldots n(A^{(k)})$ числа элементов $n(A^{(1)}), n(A^{(2)}), \ldots, n(A^{(k)})$ этих множеств:

$$n(A^{(1)} \times A^{(2)} \times \ldots \times A^{(k)}) = n(A^{(1)})n(A^{(2)}) \ldots n(A^{(k)}).$$

Часто правило умножения удобно формулировать терминах действий.

Пусть необходимо выполнить одно за другим k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе — n_2 способами и так до k-го действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий вместе могут быть выполнены $n_1 n_2 \ldots n_k$ способами.

Последнее утверждение — не что иное как правило умножения, сформулированное в терминах действий. Если обозначить через $A^{(1)}$ набор способов выполнить действие 1, через $A^{(2)}$ — действие 2, ..., через $A^{(k)}$ — набор способов выполнить действие k, то элемент из $A^{(1)} \times A^{(2)} \times \cdots \times A^{(k)}$ задает способ выполнить все k действий вместе (в указанном порядке), при этом

$$n(A^{(1)} \times A^{(2)} \times \dots \times A^{(k)}) = n(A^{(1)})n(A^{(2)})\dots n(A^{(k)}),$$

а $n(A^{(1)}) = n_1$, $n(A^{(2)}) = n_2$, ..., $n(A^{(k)}) = n_k$. Так что число способов выполнить k действий вместе равно $n_1 n_2 \dots n_k$.

Пример. *В каждую клетку прямоугольной таблицы, состоящей из m строк и n столбцов, записывают числа $+1$ или -1. Сколько таблиц можно получить таким образом?*

Решение. Заполнить таблицу $m \times n$ числами $+1$ и -1 значит выполнить mn действий (по числу клеток). Каждое действие можно выполнить двумя способами. Поэтому в силу правила умножения число способов заполнить таблицу (а, следовательно, и искомое число таблиц) равно 2^{mn}.

"Способ". Во многих задачах комбинаторики необходимо ответить на вопрос: "Сколько существует способов выполнить то или иное действие, построить или упорядочить то или иное множество и т. д.?" При этом, прежде чем подсчитывать число способов, необходимо выяснить, что именно представляет собой способ или как (чем) его можно описать. Прежде чем отвечать на вопрос "Сколько?" необходимо ответить на вопрос "Что? Что будем считать?" В рассматриваемых нами задачах способ построить (образовать, составить, упорядочить, и т. д.), как правило, можно описать элементами того или иного множества или последовательностью выполнения тех или иных действий.

Упорядоченные множества. Множество, состоящее из n элементов, коротко будем называть *n-элементным множеством.*

Определение. n-Элементное множество Ω будем называть *упорядоченным,* если каждому его элементу поставлено в соответствие число (номер элемента) от 1 до n, причем так, что различным элементам ставятся в соответствие различные номера.

Упорядоченные множества различны, если они отличаются либо своими элементами, либо их порядком.

Конечное множество можно упорядочить следующим способом: *записать все элементы множества в список $a, b, c, \dots, f$, и поставить в соответствие каждому элементу его номер в списке,* или, что то же, *расположить элементы множества на занумерованных местах и каждому элементу приписать номер места, на котором он оказался.* Как правило, так и будем поступать.

Перестановки. Мы часто будем иметь дело с упорядоченными множествами, отличающимися только порядком элементов, но не самими элементами.

Определение. *Перестановками* n-элементного множества будем называть его n-элементные упорядоченные подмножества.

Число всех перестановок n-элементного множества обозначают P_n.

Пример 4.3.1 . *Выписать все перестановки множества* $\Omega = \{a, b, c\}$.

Решение. $(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)$.

Теорема. *Число P_n всех перестановок n-элементного множества равно $n!$, т. е.*

$$P_n = n!$$

Доказательство. Каждой перестановке n-элементного множества соответствует способ его упорядочить (упорядочить — расположить элементы множества на n занумерованных местах и каждому элементу приписать номер места, на котором он оказался) и наоборот — способ упорядочить множество задает перестановку. Поэтому число перестановок n-элементного множества равно числу способов его упорядочить. Упорядочить n-элементное множество — расположить его элементы на n местах можно выполнив n действий: действие первое — заполнить первое место (одним из n элементов), действие второе — заполнить второе место (одним из $(n - 1)$ оставшихся элементов) и т. д. По правилу умножения все n действий можно выполнить $n \cdot (n - 1) \ldots 2 \cdot 1$ способами. Следовательно, n-элементное множество Ω можно упорядочить $P_n = n!$ способами.

Пример. *Сколькими способами можно упорядочить множество чисел $1, 2, \ldots, 2n$ так, чтобы четные числа получили четные номера?*

Решение. Расположим $2n$ чисел $1, 2, \ldots, 2n$ на $2n$ местах, причем так, чтобы четные числа заняли места с четными номерами (при этом нечетные числа займут места с нечетными номерами). Выполним это в два действия. Действие первое — расположим n четных чисел на n четных местах (упорядочим n-элементное множество); это можно сделать $n!$ способами. Действие второе — расположим n нечетных чисел на n нечетных местах ($n!$ способами). Два действия вместе (расположение четных чисел на четных местах, нечетных — на нечетных) согласно правилу умножения можно выполнить $(n!)^2$ способами.

Размещения. Рассмотрим упорядоченные множества, которые могут отличаться не только порядком элементов, но и самими элементами.

Определение. *Размещениями* из n элементов по k будем называть упорядоченные k-элементные подмножества n-элементного множества.

Размещения из n элементов по k различны, если они отличаются или своими элементами, или порядком элементов.

Число всех различных размещений из n элементов по k будем обозначать символом A_n^k.

Пример 4.3.2. *Пусть* $\Omega = \{a, b, c\}$. *Выписать все размещения из* 3 *элементов по* 2.

Решение. $(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b)$.

Теорема. *Число* A_n^k *всех упорядоченных* k*-элементных подмножеств* n*-элементного множества (число размещений из* n *элементов по* k*) равно* $n(n-1)\dots(n-(k-1))$, *т. е.*

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-(k-1)) = n!/(n-k)!$$

Доказательство. Каждому размещению из n элементов по k соответствует способ упорядочить k-элементное подмножество n-элементного множества и наоборот (упорядочить k-элементное подмножество — расположить его элементы на k занумерованных местах и приписать каждому элементу номер места, на котором он оказался). Поэтому число размещений из n элементов по k равно числу способов его упорядочить. Упорядочить k-элементное подмножество n-элементного множества можно последовательно выбирая k элементов из n-элементного множества и располагая их на k занумерованных местах, т. е. выполняя k действий: действие первое — заполнить первое место (одним из n элементов), действие второе — заполнить второе место (одним из $(n-1)$ оставшихся элементов) и т. д., действие k-е — заполнить k-е место одним из $(n-(k-1))$ оставшихся элементов. Первое действие можно выполнить n способами, второе — $(n-1)$ способами, и т. д., k-е действие можно выполнить $(n-(k-1))$ способами. Согласно правилу умножения все k действий вместе можно выполнить $n(n-1)\dots(n-(k-1))$ способами.

Сочетания. Рассмотрим множества, порядок элементов в которых несущественен.

Определение. *Сочетаниями из* n *элементов по* k будем называть k-элементные подмножества n-элементного множества.

Сочетания из n элементов по k различны, если они отличаются хотя бы одним элементом. Порядок элементов в сочетании несущественен — сочетания, состоящие из одних и тех же элементов, неразличимы.

Число всех k-элементных подмножеств n-элементного множества (число сочетаний из n элементов по k) будем обозначать символом C_n^k.

Пример 4.3.3. *Пусть* $\Omega = \{a, b, c\}$. *Выписать все сочетания из* 3 *элементов по* 1, *из* 3 *по* 2.

Решение. $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ — сочетания из 3 элементов по 1; $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ — сочетания из 3 элементов по 2. Из определения следует, что, например, $\{a, b\}$ и $\{b, a\}$ — одно и то же сочетание.

Теорема. *Число* C_n^k *всех* k*-элементных подмножеств* n*-элементного множества (число сочетаний из* n *элементов по* k*) равно* $n!/(k!(n-k)!)$, т. е.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Доказательство. Подсчитаем число перестановок n-элементного множества двумя способами. С одной стороны, оно равно $n!$ С другой — это число можно получить так: разобьем n-элементное множество на два подмножества содержащих соответственно k и $(n-k)$ элементов, выбрав k-элементное подмножество (это можно сделать C_n^k способами). Затем каждое из этих подмножеств упорядочим, первое — $k!$ способами, второе — $(n-k)!$ способами, всего выполнено три действия. Так что число упорядоченных n-элементных множеств равно $C_n^k k!(n-k)!$ Поэтому

$$n! = C_n^k k!(n-k)!$$

Отсюда

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Пример 4.3.4 ("шахматный город"). *Рассмотрим прямоугольную сетку квадратов — "шахматный город", состоящий из* $m \times n$ *квадратных кварталов, разделенных* $n-1$ *"горизонтальными" и* $m-1$ *"вертикальными" улицами (см. рис.* 4.3.1*). Сколько существует на этой сетке различных кратчайших путей, ведущих из левого нижнего угла (точки* $(0, 0)$*) в правый верхний угол (точку* (m, n)*)?*

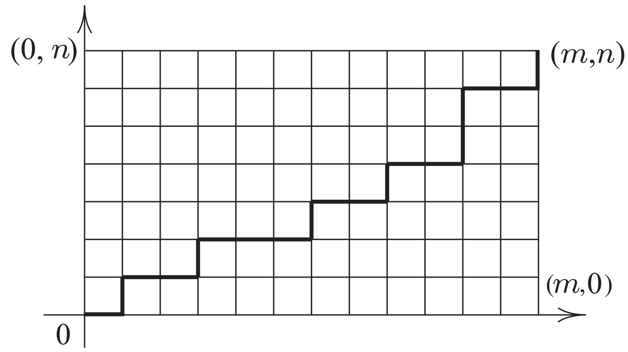

Рис. 4.3.1: “Шахматный город”

Решение. Обозначим буквой “Г” горизонтальный отрезок пути, буквой “В” — вертикальный. Каждый кратчайший путь из $(0, 0)$ в (m, n) состоит из n вертикальных отрезков и m горизонтальных. Он полностью задается последовательностью длиной $n + m$, составленной из m букв “Г” и n букв “В”, и наоборот. Поэтому число кратчайших путей из $(0, 0)$ в (m, n) равно числу последовательностей длиной $n + m$, составленных из m букв “Г” и n букв “В”. Каждая такая последовательность однозначно задается выбором m мест из $n + m$ для буквы “Г” (оставшиеся места заполняются буквами “В”), поэтому их число равно C^m_{n+m}.

Разбиения на подмножества. *Разбиением* n-элементного множества Ω на m попарно непересекающихся подмножеств, содержащих соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_m$ элементов $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n)$, будем называть *упорядоченный набор*

$$(A, B, C, \ldots, S)$$

из m непересекающихся подмножеств множества Ω, содержащих соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_m$ элементов.

Два разбиения на m попарно непересекающихся подмножеств, содержащих соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_m$ элементов, различны, если хотя бы в одной паре соответствующих k_j-элементных подмножеств $(j = 1, 2, \ldots, m)$ имеются различные элементы.

Число всех разбиений n-элементного множества на m попарно непересекающихся подмножеств, содержащих соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_m$ элементов $(k_1+k_2+\cdots+k_m = n)$, будем обозначать символом $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$.

Пример 4.3.5. *Привести все возможные разбиения множества $\Omega = \{a, b, c, d\}$ на 3 непересекающихся подмножества:*

(A, B, C), содержащих соответственно $k_1 = 1$ элементов (в множестве A); $k_2 = 2$ элементов (в множестве B); $k_3 = 1$ элементов (в множестве C).

Решение.

$(\{a\},\{b,c\},\{d\}); (\{a\},\{c,d\},\{b\}); (\{a\},\{b,d\},\{c\});$
$(\{b\},\{a,c\},\{d\}); (\{b\},\{c,d\},\{a\}); (\{b\},\{a,d\},\{c\});$
$(\{c\},\{a,b\},\{d\}); (\{c\},\{a,d\},\{b\}); (\{c\},\{b,d\},\{a\});$
$(\{d\},\{a,b\},\{c\}); (\{d\},\{a,c\},\{b\}); (\{d\},\{b,c\},\{a\}).$

Заметим, что например, $(\{a\},\{b,c\},\{d\})$ и $(\{d\},\{b,c\},\{a\})$ являются различными разбиениями множества $\Omega = \{a,b,c,d\}$.

Теорема. *Число $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ всех разбиений n-элементного множества Ω на m попарно непересекающихся подмножеств $B_1, B_2, \ldots, B_m$, содержащих соответственно $k_1, k_2, \ldots$ $\ldots, k_m$ элементов ($k_1+k_2+\cdots+k_m = n$), равно $n!/(k_1!k_2!\ldots k_m!)$,* т. е.

$$C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}.$$

Доказательство. Подсчитаем число перестановок n-элементного множества Ω. С одной стороны, это число, как известно, равно $n!$ С другой стороны его можно получить следующим образом: разбить n-элементное множество на m непересекающихся подмножеств $B_1, B_2, \ldots, B_m$, содержащих соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_m$ элементов (это можно сделать $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ способами). А затем упорядочить каждое из них — соответственно $k_1!, k_2!, \ldots, k_m!$ способами. Тогда согласно правилу умножения число n-элементных упорядоченных подмножеств множества Ω равно произведению $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)k_1!k_2!\ldots k_m!$ Отсюда имеем:

$$n! = C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)k_1!k_2!\ldots k_m!$$

Поэтому

$$C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}.$$

Числа $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ называются *полиномиальными коэффициентами.*

Перестановки с повторениями. Рассмотрим одну важную интерпретацию чисел $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$.

Определение. *Перестановкой с повторениями (словом)* длиной n, из k_1 элементов (букв) a_1, k_2 элементов (букв) $a_2, \ldots$ $\ldots, k_m$ элементов (букв) a_m $(k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n)$ будем называть последовательность длиной n, составленную из элементов (букв) $a_1, a_2, \ldots, a_m$ в количестве $k_1, k_2, \ldots, k_m$ соответственно.

Например, слово “статистика” — перестановка с повторениями составленная из двух букв “а”, двух букв “и”, одной буквы “к”, двух букв “с”, трех букв “т”.

Две перестановки с повторениями различны, если у перестановок хотя бы на одном месте (из n упорядоченных мест) расположены различные буквы.

Пример 4.3.6. *Выписать все перестановки с повторениями (слова) длиной 4, составленные из букв $\{a, b\}$, в которых буквы a, b встречаются по два раза.*

Решение. (a, a, b, b), (a, b, a, b), (b, a, a, b), (b, a, b, a), (b, b, a, a), (a, b, b, a).

Теорема. *Число всех перестановок с повторениями (слов) длиной n, которые можно составить из k_1 элементов a_1, k_2 элементов a_2 и т. д., k_m элементов a_m $(k_1+k_2+\cdots+k_m = n)$ равно*

$$C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}.$$

Доказательство. Расположив k_1 элементов a_1, k_2 элементов a_2, т. д., k_m элементов a_m на n занумерованных числами $1, 2, \ldots, n$ местах и приписав каждому элементу номер места, на котором он оказался, получим перестановку с повторениями. Очевидно, перестановка с повторениями определяется указанием k_1 мест для элемента a_1, k_2 мест для элемента a_2, т. д., k_m мест для элемента a_m, т. е. разбиением n-элементного множества занумерованных мест на m непересекающихся подмножеств, содержащих соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_m$ элементов. Таких разбиений (а вместе с ними и перестановок с повторениями) существует

$$C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}.$$

Замечание. Составляя слова, необходимо: 1° указать длину n слова, 2° указать набор $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ различных букв, используемых в записи слова, 3° указать число k_j — повторений каждой буквы a_j, используемой в записи слова $(j = 1, 2, \ldots, m)$, $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.

Количество слов, которые при этом можно получить, равно $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$.

Теорема (полиномиальная формула).

$$(a_1+a_2+\ldots+a_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n} C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m},$$

суммирование ведется по всем последовательностям $k_1, k_2, \ldots$ $\ldots, k_m$, *для которых* $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.

Доказательство. По определению

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^n =$$

$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_m)(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) \ldots (a_1 + a_2 + \ldots + a_m)$$

равно сумме всех слагаемых вида $d_1 d_2 \ldots d_n$, где каждый сомножитель d_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, равен или a_1, или a_2, и т. д. или a_m. Другими словами, каждое слагаемое $d_1 d_2 \ldots d_n$ определяется словом длиной n, составленным из букв $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Каждому такому слову соответствует произведение $d_1 d_2 \ldots d_n = a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m}$. Количество слагаемых вида $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m}$ равно числу слов длиной n, которые можно составить из k_1 букв a_1, k_2 букв a_2, и т. д., k_m букв a_m, т. е. $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$. Тем самым теорема доказана.

Модель Максвелла–Больцмана. Эта модель описывает размещение различимых частиц по ячейкам.

Теорема. *Пусть* n *различимых частиц распределяется по* m *ячейкам (областям пространства). Тогда число всех размещений частиц равно* m^n. *Число размещений частиц, в которых первая ячейка содержит* k_1 *частиц, вторая —* k_2 *частиц и т. д.,* m*-я —* k_m *частиц* $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n)$, *равно* $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$.

Доказательство. Для определенности занумеруем частицы числами $1, 2, \ldots, n$, а ячейки (области пространства) — номерами $1, 2, \ldots, m$.

Оборот "распределить (разместить) n частиц по m ячейкам" обозначает — каждой частице приписать номер ячейки, в которой она окажется. Так что каждому размещению n частиц по m ячейкам соответствует последовательность длиной n, составленная из чисел $1, 2, \ldots, m$, другими словами соответствует слово $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ длиной n, составленное из номеров ячеек $1, 2, \ldots, m$ (i_1 — номер ячейки, в которой оказалась частица с номером 1, i_2 — номер ячейки, в которой оказалась частица с номером 2 и т. д., i_n — номер ячейки, в которой оказалась частица с номером n). И наоборот, каждая такая последовательность (слово) задает распределение n различимых частиц по m ячейкам. Поэтому число всех размещений n частиц по m ячейкам равно m^n — числу слов длиной n, составленных из чисел от 1 до m. А число размещений n частиц по m ячейкам, у которых в первой ячейке находится k_1 частиц, во второй — k_2 частиц и т. д., в m-й — k_m частиц равно числу слов длиной n, составленным из k_1 элементов (букв) “1”, k_2 элементов (букв) “2” и т. д., k_m элементов (букв) “m”, т. е. равно $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$.

Сочетания с повторениями. *Сочетанием из m элементов по n с повторениями* будем называть набор (множество) из n элементов, каждый из которых принадлежит одному из m типов.

Два сочетания из m элементов по n различны, если они отличаются количеством элементов хотя бы одного типа.

Число сочетаний из m элементов по n с повторениями будем обозначать f_m^n.

Пример 4.3.7. *Выписать все сочетания с повторениями из 4 элементов a, b, c, d по 2.*

Решение. $aa, bb, cc, dd, ab, ac, ad, bc, bd, dc$.

Из определения следует, что, например, ab и ba — одно и то же сочетание с повторениями.

Теорема 4.3.1. *Число f_m^n сочетаний из m элементов по n с повторениями равно C_{n+m-1}^{m-1}:*

$$f_m^n = C_{n+m-1}^{m-1}.$$

Доказательство. Каждому сочетанию из m элементов по n с повторениями поставим в соответствие последовательность из n нулей и $m-1$ единиц следующим образом: сначала выпишем последовательно нули в количестве, равном числу элементов первого типа, входящих в сочетание с повторениями, затем единицу; далее выписываем нули в количестве, равном числу элементов второго типа, затем единицу и т. д. (после нулей, соответствующих элементам m-го типа, единицу не записываем). Наоборот, каждой последовательности из n нулей и $m-1$ единиц соответствует сочетание из m элементов по n с повторениями (сначала набираем элементы первого типа в количестве равном числу нулей до первой единицы, затем — элементы второго типа в количестве, равном числу нулей между первой и второй единицей, и т. д.). Поэтому число сочетаний из m элементов по n с повторениями равно числу последовательностей, составленных из n нулей и $m-1$ единиц, количество же таких последовательностей равно C_{n+m-1}^{m-1}.

Теорема 4.3.2. *Если $n \geq m$, то число сочетаний из m элементов по n с повторениями, у которых элемент каждого типа встречается хотя бы один раз, равно C_{n-1}^{m-1}.*

Доказательство. Установим соответствие между сочетанием из m элементов по n с повторениями и последовательностями из n нулей и $m-1$ единиц, как это было описано в доказательстве теоремы 4.3.1. Сочетаниям из m элементов по n с повторениями, у которых элемент каждого типа встречается хотя бы один раз, соответствуют последовательности из n нулей и $m-1$ единиц, у которых никакие две единицы не расположены рядом. Такие последовательности можно получить, выбрав из $n-1$ промежутков между нулями $m-1$ промежуток и расположив в них единицы. Последнее можно сделать C_{n-1}^{m-1} способами.

Пример. *Кость домино — набор из двух чисел, каждое из которых выбрано из множества* $\{0, 1, 2, \ldots, 6\}$. *Кость можно рассматривать как сочетание из* $m = 7$ *элементов по* $n = 2$ *с повторениям. Число таких сочетаний (а вместе с ними и число костей домино) равно*

$$f_7^2 = C_{2+7-1}^{7-1} = C_8^6 = \frac{8!}{2!6!} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28.$$

Пример. *Сколько существует различных частных производных порядка* n *у бесконечно дифференцируемой функции* m *переменных?*

Решение. Частная производная порядка n бесконечно дифференцируемой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ от m переменных определяется числом дифференцирований по каждой переменной и не зависит от порядка дифференцирования. Если, скажем, по первой переменной мы продифференцируем k_1 раз, по второй — k_2 раз, и т. д., по m-й — k_m раз (причем $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$), то получим частную производную $\dfrac{\partial^n f(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_m^{k_m}}$. Число таких производных равно количеству решений уравнения $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$ в целых неотрицательных числах, а последнее равно

$$f_m^n = C_{n+m-1}^{m-1}.$$

Теорема 4.3.3. *Число решений уравнения*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n \tag{4.3.1}$$

в целых неотрицательных числах равно C_{n+m-1}^{m-1}, *а в целых положительных (при* $n \geq m$*) равно* C_{n-1}^{m-1}.

Доказательство. Решением уравнения

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$$

в целых неотрицательных числах является последовательность $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ целых неотрицательных чисел такая, что

$x_1+x_2+\ldots+x_m=n$. Каждая такая последовательность задает сочетание из m по n с повторениями и наоборот. В самом деле. Сочетание из m элементов по n с повторениями однозначно задается числом x_1 элементов первого типа, числом x_2 элементов второго типа и т. д., числом x_m элементов m-го типа в него входящих, т. е. задается последовательностью $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ неотрицательных целых чисел, такой, что $x_1+x_2+\ldots+x_m=n$, и наоборот, — сочетание из m элементов по n с повторениями однозначно определяет последовательность $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ неотрицательных целых чисел, таких, что $x_1+x_2+\ldots+x_m=n$ (x_1 — число элементов первого типа, x_2 — второго и т. д., x_m — m-го типа). Поэтому искомое число решений равно числу C_{n+m-1}^{m-1} сочетаний из m по n с повторениями.

Количество решений уравнения (4.3.1) в целых положительных числах (при условии $n \geq m$) равно числу сочетаний из m элементов по n с повторениями, у которых элемент каждого типа встречается хотя бы один раз, т. е. C_{n-1}^{m-1}.

Следствие. Между множеством сочетаний из m элементов по n с повторениями и множеством решений $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ уравнения $x_1+x_2+\ldots+x_m=n$ в целых неотрицательных числах существует взаимно однозначное соответствие.

Модель Бóзе–Эйнштейна. Эта модель описывает размещение неразличимых частиц по ячейкам.

Теорема 4.3.4. *Пусть n неразличимых частиц распределяется по m ячейкам (областям пространства). Число всех возможных размещений частиц равно*

$$f_m^n = C_{n+m-1}^{m-1}.$$

Если $n \geq m$, то число тех размещений, у которых каждая ячейка содержит хотя бы одну частицу, равно C_{n-1}^{m-1}.

Доказательство. Размещение n неразличимых частиц по m ячейкам задается указанием числа x_1 частиц, попавших в 1-ю ячейку, x_2 — во 2-ю ячейку и т. д., числа x_m частиц, попавших в m-ю ячейку, т. е. задается последовательностью $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ целых неотрицательных чисел такой, что

$$x_1+x_2+\ldots+x_m=n,$$

другими словами, задается решением $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ уравнения $x_1+x_2+\ldots+x_m=n$, в целых неотрицательных числах (и наоборот). А число таких решений согласно теореме 4.3.3 равно f_m^n.

Сочетания с повторениями и слова. Пусть имеется слово длиной n, составленное из m букв (элементов): x_1 букв a_1, x_2

букв a_2 и т. д., x_m букв a_m $(x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n)$. "Ссыпав" буквы слова в урну, получим набор из n элементов, в котором число элементов первого типа равно x_1, второго — x_2, и т. д., m-го типа — x_m, т. е. получим сочетание из m элементов по n с повторениями (одно) с заданным числом элементов каждого типа.

Наоборот. Пусть мы имеем сочетание из m элементов по n с повторениями, в котором число элементов первого типа равно x_1, второго — x_2, и т. д., m-го типа — x_m (имеем набор из n элементов "ссыпанных" в урну: x_1 элементов a_1, x_2 элементов a_2 и т. д., x_m элементов a_m). Разместив элементы на n занумерованных местах (упорядочив их) получим слово. Число всех таких слов равно $C_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.